Einführung in die Nichtlineare Dynamik

Prof. Dr. Dr.h.c. Reimer Lincke
Institut für Experimentelle und Angewandte Physik
Christian-Albrechts-Universität Kiel

Literatur: Roman Worg, 'Deterministisches Chaos', B.I.Wissenschaftsverlag Mannheim, 1993. Pohlsches Drehpendel und viele Quellenangaben.
Demtröder Bd. 1. Gerthsen.

Dieses Thema eignet sich vorzüglich für Weihnachtsvorlesungen, Vertretungen, Probevorträge o.ä.. Experimente dazu sind in dem Aktenordner in der Vorlesungssammung zu finden. In den PowerPoint-Präsentationen sind all diese Dinge zusammengefaßt.

Mit dem Programm „NICHTLIN.EXE“ kann man auf folgende Weise in das Thema Nichtlineare Dynamik (vulgo Chaos) einführen: Bildschirm möglichst 1024*768

1. **Pendelperiode**. Die übliche Behandlung des mathematischen Pendels benutzt die Linearisierung $\sin(\alpha) \approx \alpha$ und liefert die Pendelperiode $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Daß dieses Ergebnis nur für kleine Anfangsauslenkungen α_0 gilt, zeigt dieser Programmteil. Hier wird die Pendelperiode numerisch mit Hilfe der Energieerhaltung berechnet. (übrigens: eine schöne Rechenaufgabe für Studenten (Pascal, MathCad o.ä.).

2. **Stabpendel**. Diese Programm demonstriert die Abhängigkeit $T(\alpha_0)$ und führt außerdem das Konzept ‚Phasenraum‘ ein.

3. **Nichtlineare Schwingung** .Daß diese Abhängigkeit $T(\alpha_0)$ eine Folge einer nichtlinearen Kraft ist, zeigt dieser Programmteil, in dem die lineare Kraftkonstante, die Dämpfungs-konstante und die Konstante eines kubischen Beitrages frei gewählt werden können.

4. **Duffing**-Potential. Hier wird gezeigt, wie das Parabelpotential durch einen Term x^4 erweitert werden kann, so daß ein Potential entsteht wie beim Pohlschen Drehpendel mit Unwucht.

5. **Poincaré-Punkte.** Hier wird eine alternative Art vorgeführt, Aussagen über komplexe Schwingungen zu erhalten.

6. Das **Drehpendel-Bild** sollte als nächstes angesehen werden. Diese Gerät ist zum Paradigma der nichtlinearen Dynamik geworden.

7. **Pohlsches Drehpendel**. Ohne Unwucht ist dieses Gerät ein an den meisten Schulen und Universitäten vorhandenes Beispiel für den harmonischen Oszillator (Der Phasenraum enthält **3** Dimensionen: Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Motorphase! Chaos erfordert mindestens 3 Dimensionen!) Mit Unwucht wird es durch ein Duffing-Potential beschrieben. Damit lassen sich die o.a. Phänomene und Prinzipien der Reihe nach demonstrieren. Dazu sollte man die in den ‚Empfehlungen‘ gegebenen Parameter nacheinander erproben:

a) **Freie Schwingung**. Kein Motor, nur mechanische Dämpfung.
b) **Sensitivität (l/r).** Wo das Pendel zur Ruhe kommt (links oder rechts), hängt äußerst empfindlich von den Startbedingungen ab (140° bzw. 140,1° Anfangsauslenkung). Verwende ‚Vergleich'. Abstand im Phasenraum ist in 3 Dimensionen berechnet!
c) **Sensitivität.** Auch mit Motortrieb ist der spätere Verlauf extrem stark von den Anfangsbedingungen abhängig. Deterministisches Chaos.
d) **1-fach**: Fast harmonische Schwingung bei starker (Wirbelstrom-) Dämpfung, ganz unten im Duffing-Potential. Die noch nicht stationäre Einschwingphase kann durch Anklicken des Bildes gelöscht werden. Die Iteration dann mit Weiter fortsetzen.
e) **2-fach**: Geringere Dämpfung. Weiter oben im Duffing-Potential. Längere Einschwingphase (Löschen!). Periodenverdoppelung: 2 Poincaré-Punkte!
f) **4-fach**: Noch weiter oben im Duffing-Potential. Periodenvervierfachung: 4 Poincaré-Punkte!
g) **Chaos einseitig**. Noch höher im Duffing-Potential. Die Abweichungen von der Parabel werden immer wichtiger: Keine Periodizizäten erkennbar. Immer neue Poincaré-Punkte!: nicht periodisch!
h) **Chaos zweiseitig**. Dito. Poincaré-Punkte nach Einschwingen löschen. Seltsamen Attraktor ansehen!
i) **Fenster im Chaos**. Mitten in den chaotischen Schwingungen sind periodische Schwingungen angesiedelt!
j) **Einzugsbereiche**. Zwei Anfangswinkel vergleichen. Nach Einschwingphase Schirm löschen (anklicken).
k) **Feigenbaum**. In diesem Programmteil wird der zeitliche Verlauf der Schwingung für v-proportionale Dämpfungen zwischen 1 und 0 berechnet. Es werden aber nur die (positiven und negativen) Extremwerte der Auslenkung Phi(t) gezeichnet. Damit das System einschwingen kann, läuft die Schwingung zuerst 300 s; erst dann beginnt die ebenfalls 300 s dauernde Aufzeichnung. Klicken Sie 'Feigenbaum' ein zweites Mal an, wird die Prozedur abgebrochen. Sie können das letzte Delta dann verwenden, um sich den dazugehörigen Schwingungstyp anzusehen.

Die neueste Programmversion enthält eine animierte Darstellung des Pohlpendels. Um sie richtig zeigen zu können, sollte der PC nicht zu langsam sein.

8. Quadratische Abbildung. " Rückabbildung und Bifurkationsszenario"
Für nichtlineare Systeme ist eine detaillierte Beschreibung durch Angabe von x(t) und v(t) bzw. p(x) i.a. nicht möglich. Andersartige ('globale') Aussagen über das dynamische Verhalten eines Systems erhält man in manchen Fällen durch das Verfahren der 'Rückabbildung', in dem z.B. das n+1. Maximum gegen das n. Maximum einer nichtlinearen Schwingung aufgetragen wird. Bei einer solchen Darstellungsweise kann man sogar im Chaos verblüffende Strukturen erkennen. Überraschenderweise zeigt die Natur hier eine gewisse 'Universalität', die man mit einer einfachen eindimensionalen Iteration untersuchen kann. Üblicherweise wird hierzu die logistische Abbildung Xneu=P*Xalt*(1-Xalt) verwandt. In diesem Programm können aber auch ähnliche Funktionen (mit quadratischem Maximum) gewählt werden.
Man beginne mit der tabellarischen Darstellung (nachrechnen!). Dann Grafik und Feigenbaum. Mit CRSR Werte ausmessen und in Grafik nachkontrollieren!

Viel Spaß !