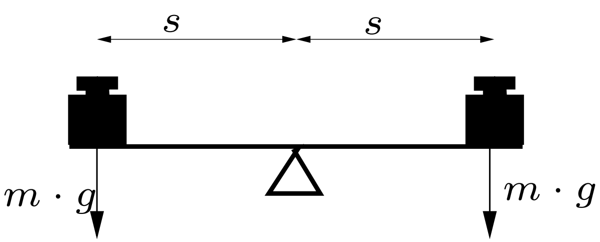
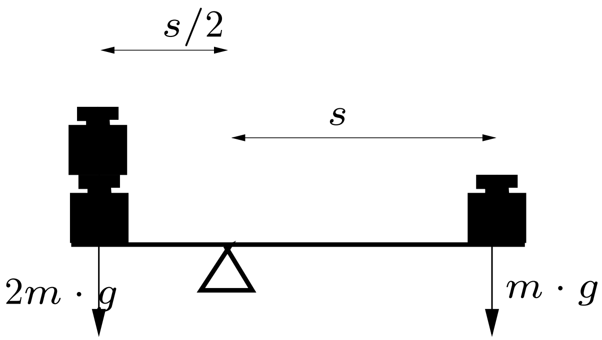
Arbeit und Leistung



$\Leftrightarrow$ $mgs = mgs$

$mgs =$ const.



$\Leftrightarrow$ $2mgs/2 = mgs$

$\vdots$

$\vdots$ $\Leftrightarrow$ $nmgs/n = mgs$

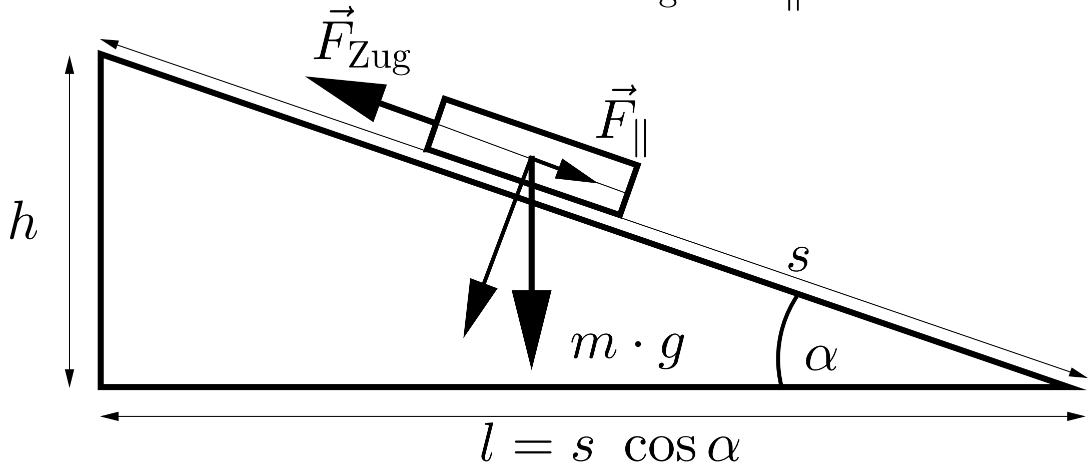
Arbeit und Leistung

$\boxed{\textbf{Arbeit ist Kraft mal Weg}}$

- Gotthardstraße
- Treppe und Lift
- Feder
- Bergsteiger/Wanderer

Arbeit und Leistung

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{Zug}} - \vec{F}_{\|}$$



Gleichmässige Bewegung:

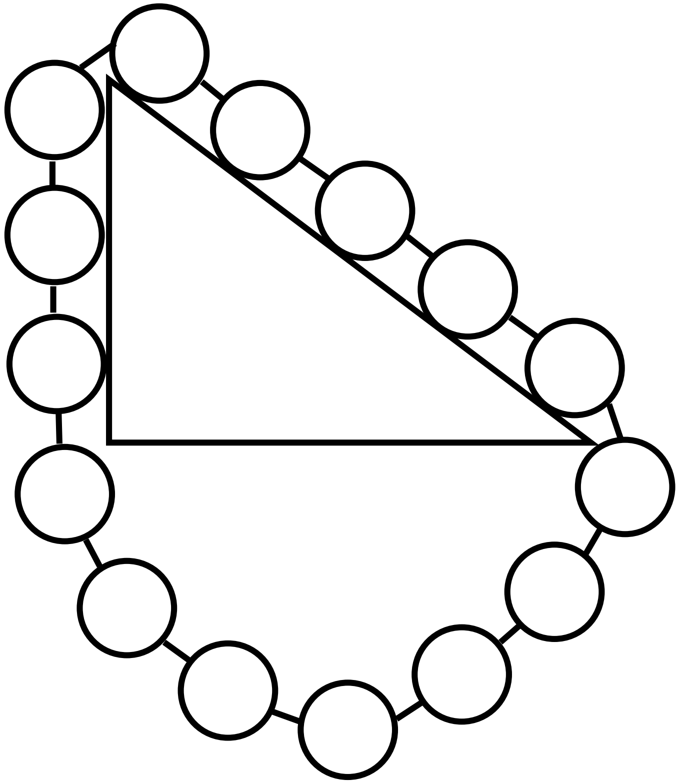
$\vec{F}_{\text{zug}} = -\vec{F}_{\|}$

$F_{\|} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$A = F_{\|} \cdot s \quad ; \quad s = \frac{h}{\sin\alpha}$

$A = \frac{mg\sin\alpha h}{\sin\alpha} = mgh$

Arbeit und Leistung

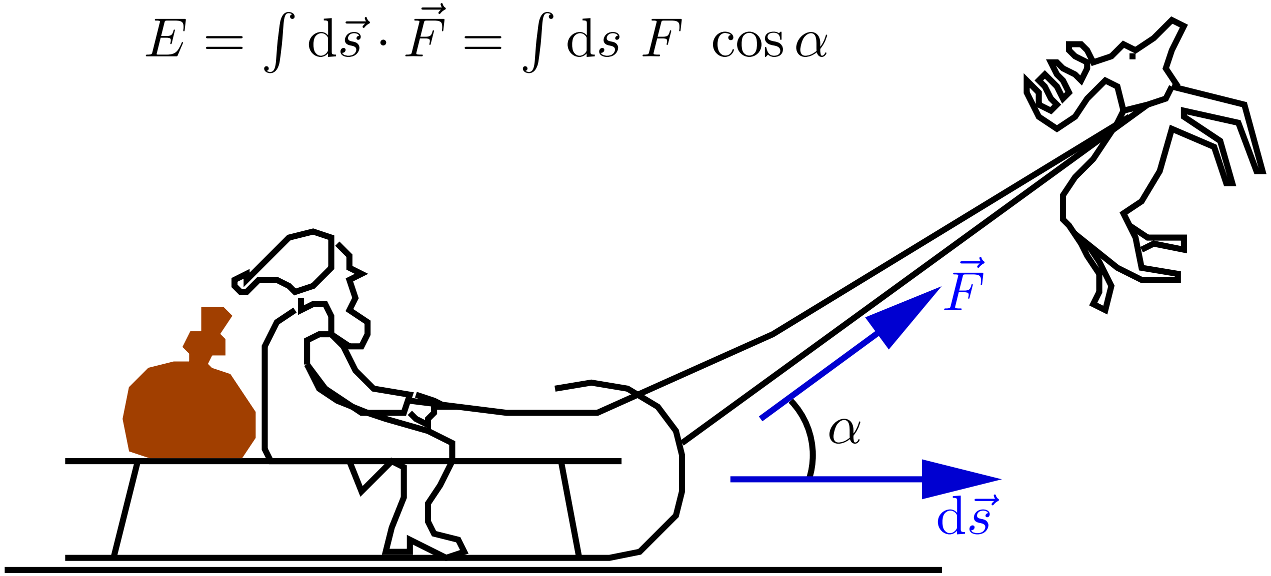


Wunder ist
kein Wunder

Simon Stevin,
um 1600

Arbeit und Leistung

$$E = \int \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{F} = \int \mathrm{d}s\ F\ \cos\alpha$$



Arbeit und Leistung

$\boxed{\textbf{Arbeit ist Kraft mal Weg}}$ [Arbeit] = N m = J = W s

$\boxed{\textbf{Leistung} = \textbf{Arbeit pro Zeit}}$ [Leistung] = N m/s = J/s = W

Beispiel:

100 kg Backsteine 10 m hochtragen.

$E = mgh = 100 \cdot 9,81 \cdot 10$ kg m^2/s^2 $= 9810$ J $= 2,725$ Wh

dito innerhalb von 10 Minuten: Leistung $P = 9810/600$ J/s $= 16,35$ W.

Potentielle und kinetische Energie

- Energie: gespeicherte, “mögliche” (potentielle) Arbeit
- potentielle Energie: Lageenergie (Wasser im Stausee,. . .)
- kinetische Energie: Bewegungsenergie

$$E_{\mathrm{pot}} = mgh \longrightarrow v_h = \sqrt{2gh} \longrightarrow h = \frac{v_h^2}{2g} \Longrightarrow mgh = \frac{mgv_h^2}{2g} = \frac{m}{2}v_h^2 = E_{\mathrm{kin}}$$

Energieerhaltung

Energie bleibt erhalten bzw. wird umgewandelt, d. h. $E = E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}} = \mathrm{const.}$
Beispiele:

- Pendel
- Galilei'sches Hemmungspendel

Formal:

$$E = \int \mathrm{d}x\ ma = m \int \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m \int v\ \mathrm{d}v = \frac{m}{2} v^2 .$$

Umwandlung von potentieller in kinetische Energie. Oft wird Energie auch in andere Formen umgewandelt, wie Wärme, Schall, Deformation, etc.

Bewegung in Systemen mit mehreren Massenpunkten

Wir betrachten ein System mit mehreren Massenpunkten. Für jeden Massenpunkt i einzeln gilt nach Newton 2:

$$F_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p_i}}{\mathrm{d}t}.$$

Für n Massenpunkte muss also ein System von n Bewegungsgleichungen gelöst werden. Vereinfachend beginnen wir mit $n = 2$.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{21} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t},$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t},$$

wobei $\vec{F}_{21}$ die Kraft darstellt, welche Massenpunkt 2 auf Massenpunkt 1 ausübt.

$\vec{F}_1$ stellt die Kraft dar, welche von außen auf Massenpunkt 1 wirkt. Die Kräfte können z. B. vom Ort oder der Geschwindigkeit abhängen. Nach Newton 3 ist $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Damit fallen die “inneren” Kräfte beim Bilden der Summe der Bewegungsgleichungen heraus:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Ist $\vec{F} = 0$, so ist

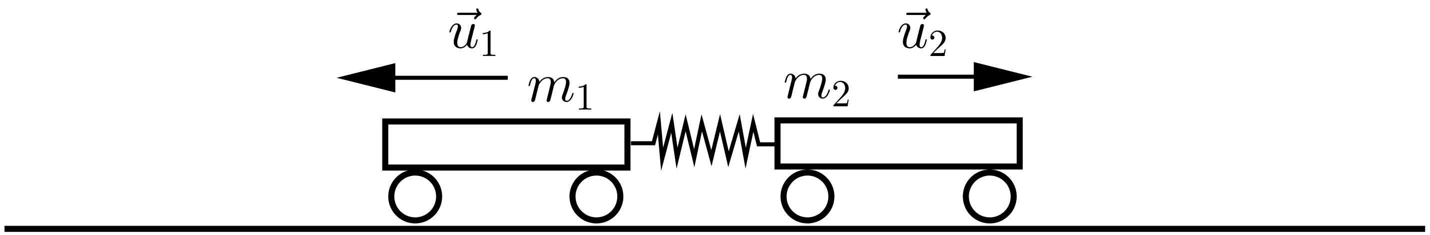
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{bzw.}\, \vec{p} = \text{const.},$$

analog zum zweiten Newtonschen Gesetz.

Ohne Einwirkung äußerer Kräfte ($\vec{F} = 0$) bleibt in einem System von n Massenpunkten der Gesamtimpuls erhalten ($\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$).

Impuls und Impulserhaltung

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$



Danach muss gelten

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0,$$

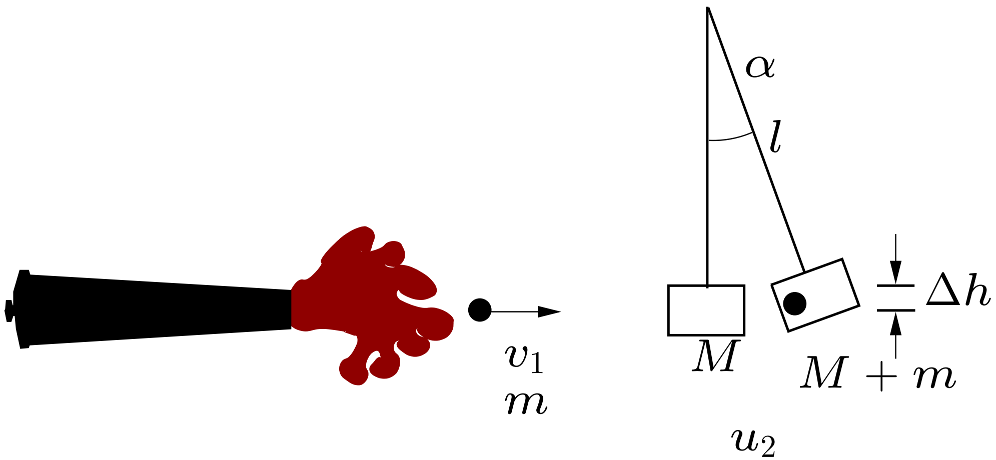
woraus sofort folgt, dass

$$u_2 = -\frac{m_1}{m_2} u_1.$$

<u>Beispiel:</u> Rakete, hier verändert sich allerdings m mit der Zeit. . .

Impuls und Impulserhaltung

Anwendung: Ballistisches Pendel



$$u_2 = \sqrt{2g\Delta h}$$
$$mv_1 = (m+M)u_2$$
$$v_1 = \ldots \text{ Übung!}$$

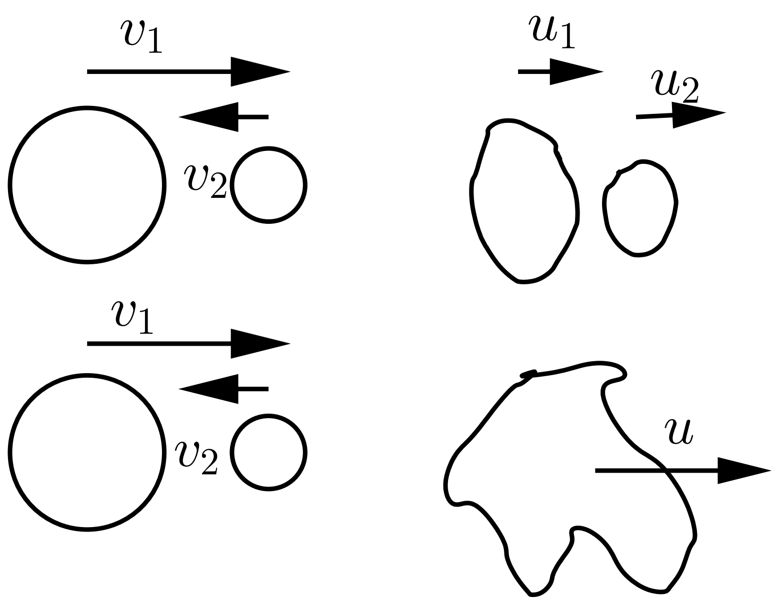
Frage: Wie groß ist der Anteil der Energie, der in Wärme und Deformation umgewandelt wird?

Stöße

Man unterscheidet verschiedene Sorten von Stößen:

- inelastischer Stoß: endotherm, Umwandlung kinetischer Energie in innere Energie (z. B. Wärme)
- elastischer Stoß: Energieerhaltung
- schiefer Stoß: Geometrieeffekte
- (exothermer Stoß: Umwandlung innerer Energie in kinetische Energie (z. B. $e^- - e^+ \longrightarrow 2\gamma$))

Inelastische Stöße



teilweise inelastisch

vollständig inelastisch

Inelastische Stöße II

Vollständig inelastischer Stoß:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u, \quad \text{also} \quad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}.$$

Vorzeichen von v_1 und v_2 beachten! Für $m_1 = m_2$ gilt offensichtlich

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Aus den Geschwindigkeiten lässt sich die in innere Energie verwandelte kinetische Energie berechnen (Übung!).

Elastische Stöße

Zusätzlich bleibt kinetische Energie erhalten!

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2,\\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2.\end{aligned}$$

Zwei Unbekannte, zwei Gleichungen! Sortiere nach Körpern 1 und 2:

$$\frac{1}{2}m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = \frac{1}{2}m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right), \tag{1}$$

$$m_1\left(v_1 - u_1\right) = m_2\left(u_2 - v_2\right). \tag{2}$$

Dividiere Gleichung 1 durch Gleichung 2 und löse nach u_1 und u_2 auf.

Elastische Stöße

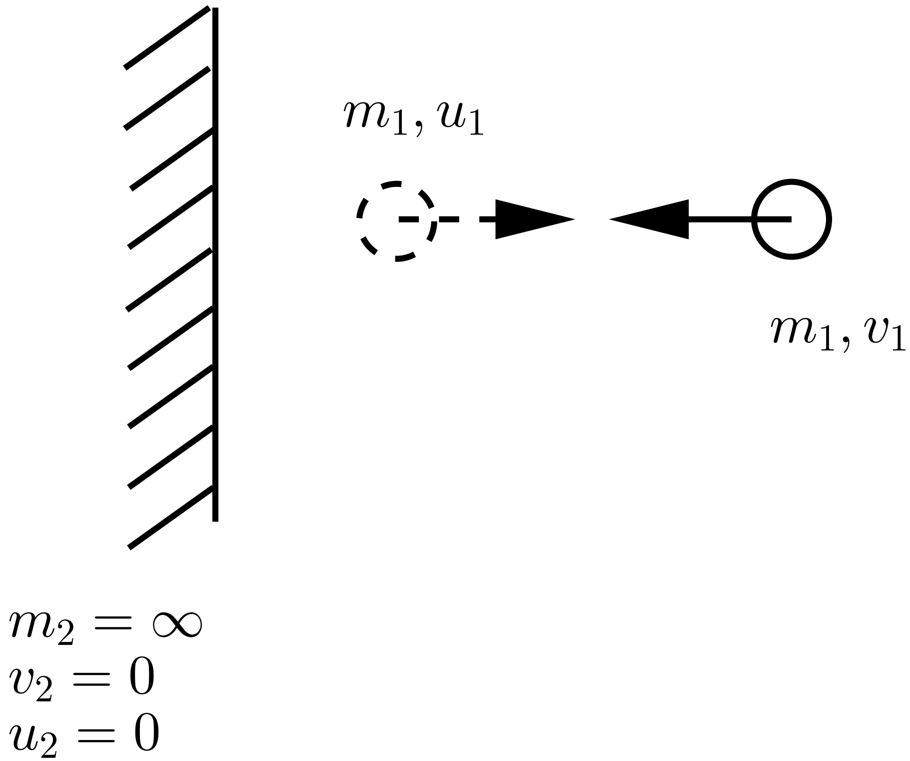
$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (3)$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4)$$

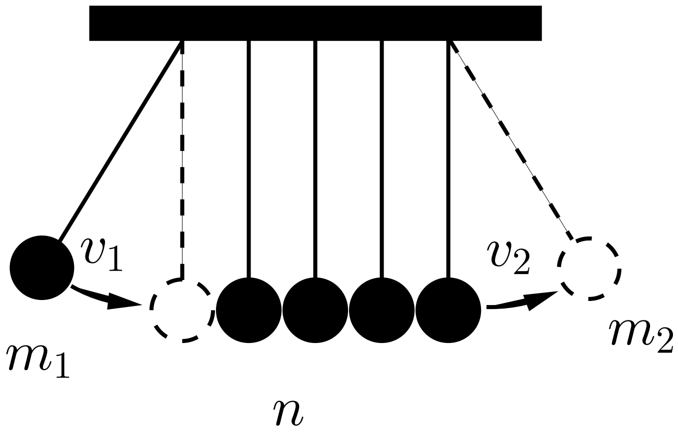
Spezialfälle:

- $m_1 = m_2 \Longrightarrow u_1 = v_2$ und $u_2 = v_1$
- $m_1 \gg m_2 \Longrightarrow u_1 \approx v_1$ und $u_2 \approx 2v_1 - v_2$

Stoß mit einer unbeweglichen Wand



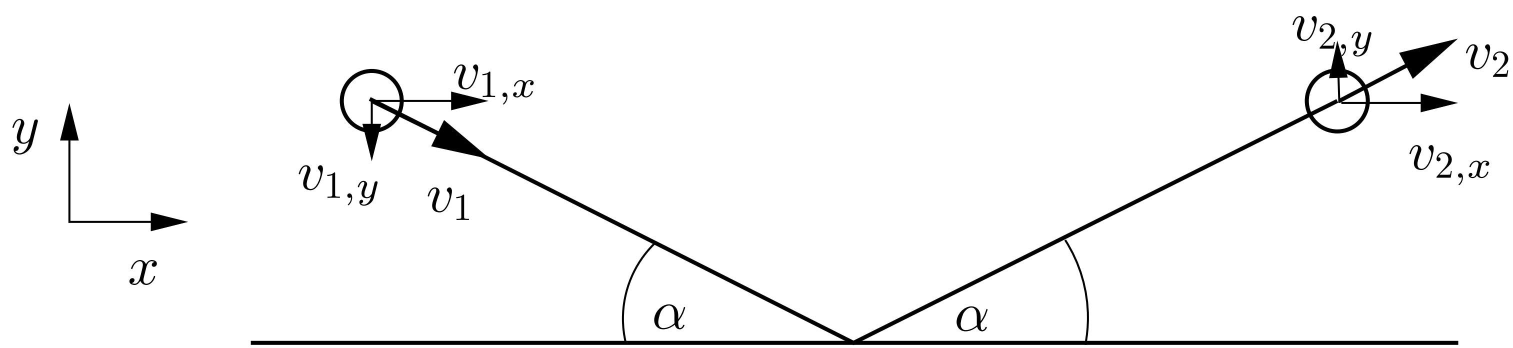
Mehrere Körper auf einer Linie



$$n_1 m_1 v_1 = n_2 m_2 v_2 \quad \text{(Impulssatz);} \qquad \frac{n_1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{n_2}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{(Energiesatz).}$$

$$m_1 = m_2 \Longrightarrow n_1 = n_2$$

Bewegung in der Ebene



Überlagerung einer Bewegung entlang von x mit einer Reflexion an einer Wand.

$$v_{2,x} = v_{1,x}; \quad v_{2,y} = -v_{1,y}$$

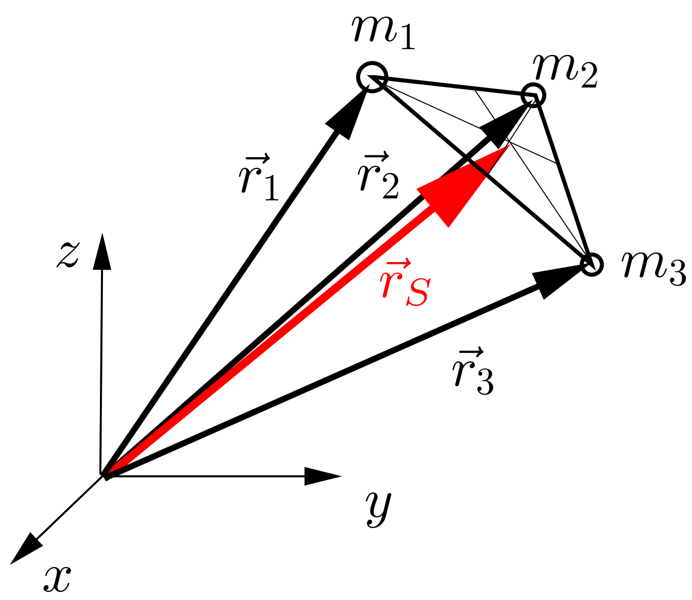
$$m_2 \neq \infty$$

Wie soll nun ein Stoß in der Ebene behandelt werden, wenn $m_2 \neq \infty$? Aus der Impuls- und Energieerhaltung

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \end{aligned}$$

ergeben sich nur drei Bedingungen an die vier Unbekannten $u_{1,x}, u_{1,y}, u_{2,x}$ und $u_{2,y}$. Offensichtlich wird die Situation in drei Dimensionen noch schlimmer, 6 Unbekannten stehen nur vier Gleichungen gegenüber. Diese prinzipielle Schwierigkeit lässt sich nicht beheben, wohl aber in handlichere Teilprobleme unterteilen.

Der Schwerpunkt eines Systems



$$\vec{r}_S \doteq \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Schwerpunktgeschwindigkeit

Greifen keine äußeren Kräfte an, so bleibt der Impuls des Systems konstant.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Verändern sich die Massen nicht, so ändert sich auch die Geschwindigkeit des Systems nicht, genauer,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Damit lässt sich eine mittlere Geschwindigkeit definieren, welche unverändert bleibt:

$$\vec{v}_S \doteq \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i.$$

Offensichtlich ist

$$\vec{v}_S = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_S}{\mathrm{d}t},$$

d. h. die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systems bleibt erhalten.
Oft vereinfachen sich die auftretenden Gleichungen erheblich, wenn man in das Schwerpunktsystem transformiert, denn

$$\begin{aligned}
\vec{p}_S &= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_S \\
\vec{p}_{S,S} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_i - \vec{v}_{i,S}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{i,S} = M\vec{v}_S - M\vec{v}_S = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Die kinetische Energie transformiert sich ebenso einfach:

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1(\vec{v}_{1,S} + \vec{v}_S)^2 + m_2(\vec{v}_{2,S} + \vec{v}_S)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 v_{1,S}^2 + m_2 v_{2,S}^2\right) + \frac{1}{2}\left(m_1 v_S^2 + m_2 v_S^2\right) + (m_1\vec{v}_{1,S} + m_2\vec{v}_{2,S}) \cdot \vec{v}_S \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 v_{1,S}^2 + m_2 v_{2,S}^2\right) + \frac{1}{2}\left(m_1 v_S^2 + m_2 v_S^2\right) + 0 \\
E_{\mathrm{kin}} &= E_{\mathrm{kin}}^{(S)} + \frac{1}{2}M v_S^2
\end{aligned}
$$

weil ja $\left(m_1 v_S^2 + m_2 v_S^2\right) = \vec{0}$.

Bewegung zweier Teilchen im Schwerpunktsystem

Nach Voraussetzung wirken keine äußeren Kräfte auf das System, d. h. es wirken nur die inneren Kräfte $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{21}$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{1,S}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1}; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{2,S}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2}$$

Subtraktion (unter Berücksichtigung von $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$) liefert

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{v}_{1,S} - \vec{v}_{2,S})}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{21},$$

wo $(\vec{v}_{1,S} - \vec{v}_{2,S}) = \vec{v}_{12,S}$ die Relativgeschwindigkeit zwischen den Teilchen darstellt. Mit der Definition der reduzierten Masse μ

$$\mu \doteq \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

kann so eine besonders einfache Bewegungsgleichung gefunden werden

$$\vec{F}_{21} = \mu \frac{\mathrm{d}v_{12,S}}{\mathrm{d}t}.$$

Die Bewegung der beiden Teilchen kann also auf die Bewegung eines einzelnen Teilchens der reduzierten Masse μ reduziert werden.

Elastische Stöße im Schwerpunktsystem

Wegen $\vec{p}_{S,S} = \vec{0}$ muss auch gelten

$$\vec{p}_{1,S} = -\vec{p}_{2,S} \quad \text{und} \quad \vec{p}\,'_{1,S} = -\vec{p}\,'_{2,S}.$$

Einsetzen in den Energiesatz ergibt

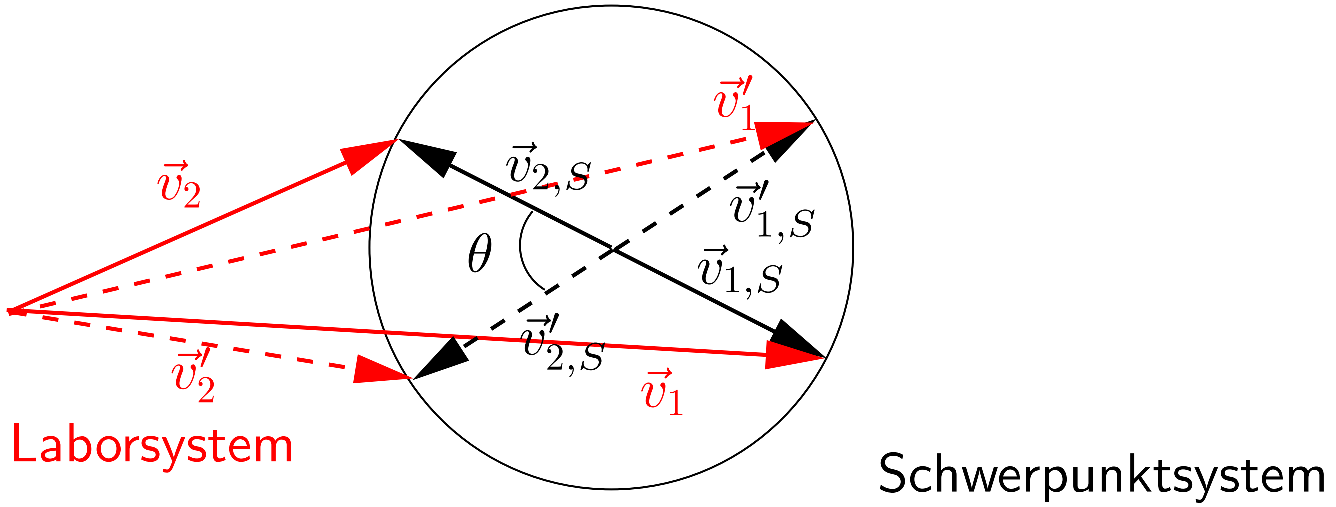
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p'^2_{1,S} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p^2_{1,S} + Q.$$

Verwende reduzierte Masse μ, so

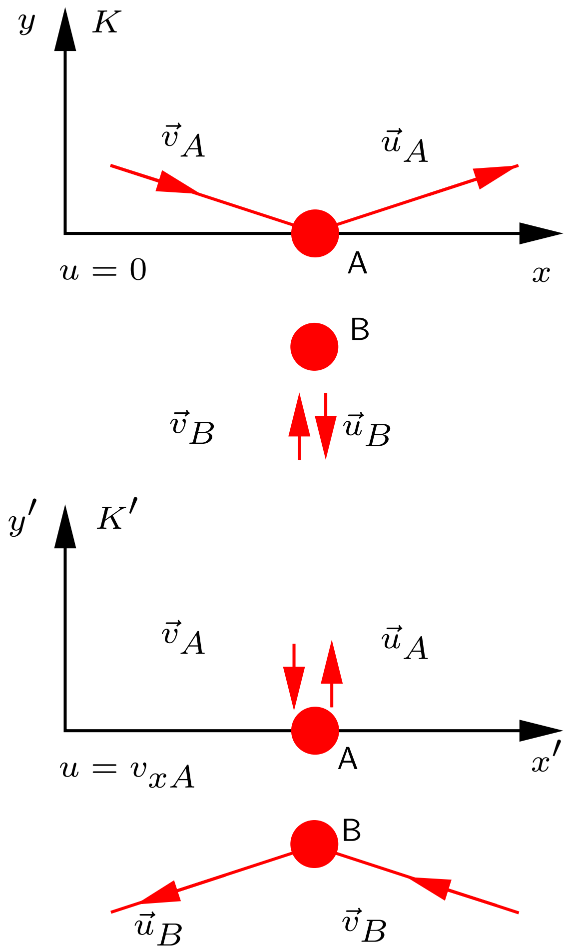
$$\frac{p'^2_{1,S}}{2\mu} = \frac{p^2_{1,S}}{2\mu} + Q.$$

Für elastische Stöße ist $Q = 0$ (nach Definition), folglich $p'^2_{1,S} = p^2_{1,S}$ und $p'^2_{2,S} = p^2_{2,S}$.

Dies lässt lediglich eine Drehung der Impulse zu!



Relativistische Formulierung



Wir betrachten nun zwei Körper derselben Masse $m_A = m_B = m$, die sich bei relativistischen Geschwindigkeien begegnen. Wie sieht ein Stoß in diesem Falle aus? Dabei bewegen wir uns in einem System K so, dass sich der Körper A in y Richtung nur sehr langsam bewegt und diese Impulskomponente beim Stoß umgekehrt wird, $v_{yA} = -u_{yA}$. Dasselbe geschehe mit Körper B und Körper A bewege sich immer noch mit Geschwindigkeit v_{xA} in x-Richtung. Der Impuls ist also erhalten.

Nun betrachten wir den Stoß im System K', welches sich mit $v = v_{xA}$ entlang der x-Achse bewegt. In diesem System sind also die Rollen von A und B vertauscht. Die Geschwindigkeiten transformieren sich gemäß der

Lorentz-Transformation,

$$v'_y = \frac{v_y/\gamma}{1 - v_x v/c^2}.$$

Nun ist im System K für die beiden Teilchen die Geschwindigkeit in x-Richtung verschieden, weshalb sich auch die y-Komponenten der Geschwindigkeit anders transformieren!

$$\begin{aligned}
v'_{yA} &= \frac{v_{yA}/\gamma}{1 - v_{xA} v/c^2} = \frac{v_{yA}/\gamma}{1 - v^2/c^2} = \gamma v_{xA}, \quad \text{da} \quad v = v_{xA}, \\
v'_{yB} &= \frac{v_{yB}/\gamma}{1 - v_{xB} v/c^2} = v_{xB}/\gamma, \quad \text{da} \quad v_{xB} = 0,
\end{aligned}$$

während die entsprechenden Geschwindigkeiten im System K die Beträge $|v_{yA}|$

und $|v_{yB}|$ haben, also

$$\frac{v'_{yA}}{v_{yA}} = \gamma \quad \text{und} \quad \frac{v'_{yB}}{v_{yB}} = \gamma.$$

In beiden Systemen gilt der Impulssatz und insbesondere für die y-Komponente gilt

$$m_A v_{yA} + m_B v_{yB} = 0 = m'_A v'_{yA} + m'_B v'_{yB}.$$

Dies ist aber für $m_A = m'_A$ und $m_B = m'_B$ nicht möglich, weil ja die y-Komponenten der Geschwindigkeiten verschieden sind. Also müssen die Massen m und m' verschieden sein! Für kleine y-Komponenten gilt die Näherung

$$\begin{aligned} v_A \approx v_{xA} = v \quad &, \quad v'_A \approx 0, \\ V_B \approx 0 \quad &, \quad v'_B \approx v_{xB} = v. \end{aligned}$$

Damit können wir mit $m_0 \doteq m(v=0)$ schreiben

$$\begin{aligned} m(v) v_{yA} + m_0 v_{yB} &= 0, \\ m_0 v'_{yA} + m(v) v'_{yB} &= 0. \end{aligned}$$

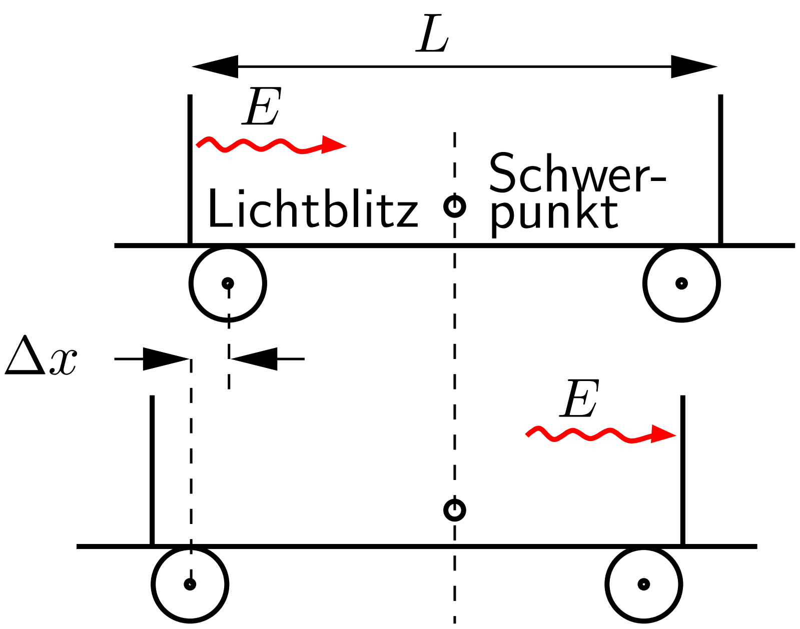
Wir nehmen die Terme mit v_{yB} bzw. v'_{yB} nach rechts, dividieren die Gleichungen und erhalten

$$\frac{m^2(v)}{m_0^2} = \frac{v_{yB}}{v'_{yB}} \frac{v'_{yA}}{v_{yA}} = \gamma^2.$$

Damit erhalten wir

$$\underline{m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}.$$

Relativistische Energie: $E = mc^2$



Wir wollen nun noch die bekannt Energie-Masse Beziehung $E = mc^2$ verstehen. Dazu betrachten wir einen leichten Wagen, an dessen linker Wand ein Lichtblitz der Energie E ausgesandt wird. Nach den Gesetzen der klassischen Physik hat er einen Impuls $p = E/c$ (Stoff kommt im zweiten Semester). Weil der Wagen vor dem Blitz ruhen soll, muss auch nach dem Blitz der Schwerpunkt am selben Ort bleiben, der Gesamtimpuls bleibt erhalten. Deshalb muss sich der Wagen ein klein wenig nach links bewegen mit einer Geschwindigkeit $v = -p/M = -E/Mc$. Weil diese Geschwindigkeit sehr klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit,

$v \ll c$, erreicht der Lichtblitz die rechte Wand nach einer Zeit $\Delta t = L/c$, während der sich der Wagen lediglich um $\Delta x = v\Delta t = -EL/Mc^2$ nach links bewegt hat. Erreicht der Blitz die rechte Wand, so hält der Wagen an. Damit der Schwerpunkt unbewegt bleibt, muss dem Licht eine Masse m zugeschrieben werden!

$$mL + M\Delta x = 0.$$

Daraus folgt

$$mL - MEL/Mc^2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad E = mc^2.$$

Setzen wir darin nun unseren Ausdruck für die Masse ein, so finden wir

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 - (m(v) - m_0)c^2,$$

wobei der erste Term dies sog. **Ruheenergie** und der zweite die eigentliche kinetische Energie ist. Für diese gilt mit einer Potenzreihenentwicklung für γ

$$E_{\text{kin}} = (m(v) - m_0)\, c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ finden wir den klassischen Ausdruck wieder.

Für richtige Rechnungen ist es oft nützlicher, die Energie-Impuls Beziehung zu kennen:

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}.$$

Relativistische Kraft

Wir nehmen den relativistischen Impuls $p = \gamma m_0 v$ und das zweite Newtonsche Gesetz und erhalten

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\vec{v} + m\vec{a}.\end{aligned}$$

Die innere Ableitung in der Klammer wird mit $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}/\mathrm{d}v)$ durchgeführt:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{m_0\left(v/c^2\right)a}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\vec{v}+m\vec{a}, \\
&= \gamma^3 m_0 a\left\{\frac{v^2}{c^2}\frac{\vec{v}}{v}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\vec{a}}{a}\right\}.
\end{aligned}
$$

Die Kraft hat also nicht nur eine Komponente in Beschleunigungsrichtung $\vec{a}/a$, sondern auch in Geschwindigkeitsrichtung $\vec{v}/v$! Diese wird aber für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ vernachläßigbar.