Der Trägheitstensor J

Stellen wir uns einen Kreisel vor, der um eine beliebige Achse dreht. Gilt die Beziehung $\vec{L} = J\vec{\omega}$ in jedem Bezugssystem?

Dazu betrachten wir nochmals die Bewegung eines starren Körpers. Er lässt sich ausdrücken als Überlagerung einer Translationsbewegung mit einer Rotation, also

$$\vec{v}_i = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

für jeden gedachten Massenpunkt im Körper. Nun muss ja die kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ sein, also

$$E_{\mathrm{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_S^2 + 2\vec{v}_S \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \right).$$

Nun sind $\vec{v}_S$ nd $\vec{\omega}$ für alle Punkte im Körper gleich. Also lassen sich $\vec{v}_S$ und $\vec{\omega}$ vor das Summenzeichen ziehen. Dazu nutzen wir die Eigenschaft des Spatproduktes aus ($\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{a})$), womit der zweite Term umgeformt wird in

$$\sum_i m_i \vec{v}_S \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}_S) = (\vec{\omega} \times \vec{v}_S) \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Weil aber nach Definition des Schwerpunkts $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$, verschwindet dieses Glied. Damit bleibt nur noch

$$E_{\text{kin}} = \frac{\left(\sum_i m_i\right)}{2} \vec{v}_S^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2.$$

Nun verwenden wir die Vektoridentität

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{A}^2 \vec{B}^2 - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)^2$$

um den zweiten Term umzuschreiben

$$E_{\text{kin}} = \frac{\left(\sum_i m_i\right)}{2} \vec{v}_S^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2\right).$$

Dies ist natürlich das bekannte Resultat, dass sich die kinetische Energie als Summe aus translatorischer und rotatorischer Energie schreiben lässt.

Wir drücken dieses Resultat für die rotatorische Energie nun noch komplizierter aus, in sog. Tensorschreibweise, indem wir die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ in Komponenten r_j und ω_j ausdrücken (dabei unterdrücken wir, um die entstehenden Ausdrücke zu vereinfachen, den Index i von $\vec{r}_i$)

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{rot}} &= \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\omega_j^2 r_l^2 - \omega_j r_j \omega_k r_k\right), \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\omega_j \omega_k \delta_{jk} r_l^2 - \omega_j \omega_k r_j r_k\right), \\
&= \frac{1}{2}\omega_j \omega_k \sum_i m_i\left(r_l^2 \delta_{jk} - r_j r_k\right),
\end{aligned}$$

wo δ_{jk} das sog. Kronecker-Delta ist und wir die sog. Einstein-Konvention vorausgesetzt haben, laut der über doppelt vorkommende Indizes summiert wird, also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i \doteq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Wir definieren nun als **Trägheitstensor** J_{jk} den Ausdruck

$$J_{jk} \doteq \sum_i m_i \left(r_l^2 \delta_{jk} - r_j r_k \right) ,$$

womit die kinetische Energie des starren Körpers in einem beliebigen Koordinatensystem lautet

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{(\sum_i m_i)}{2} \vec{v}_S^2 + \frac{1}{2} J_{jk} \omega_j \omega_k .$$

Aus seiner Definition sieht man leicht, dass er symmetrisch ist

$$J_{jk} = J_{kj} .$$

Der Trägheitstensor J

Die früher hergeleitete Vektorgleichung $\vec{L} = J\vec{\omega}$ z. B. lautet nun in Komponentenschreibweise

$$
\begin{aligned}
L_x &= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z, \\
L_y &= J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z, \\
L_z &= J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z.
\end{aligned}
$$

Die Komponenten J_{jk} des **Trägheitstensors** sind gegeben durch:

$$
J_{xx} = \int \mathrm{d}m(r^2 - x^2); \quad J_{yy} = \int \mathrm{d}m(r^2 - y^2); \quad J_{zz} = \int \mathrm{d}m(r^2 - z^2);
$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int \mathrm{d}mxy; \quad J_{yz} \quad = \quad J_{zy} = -\int \mathrm{d}myz; \quad J_{xz} = J_{zx} = -\int \mathrm{d}mxz.$$

Damit lautet der Trägheitstensor ausgeschrieben

$$J_{jk} = \begin{pmatrix} \int \mathrm{d}m(r^2 - x^2) & -\int \mathrm{d}mxy & -\int \mathrm{d}mxz \\ -\int \mathrm{d}mxy & \int \mathrm{d}m(r^2 - y^2) & -\int \mathrm{d}myz \\ -\int \mathrm{d}mxz & -\int \mathrm{d}myz & \int \mathrm{d}m(r^2 - z^2) \end{pmatrix}.$$

Die diagonalen Elemente ergeben sich aus der Überlegung, dass das Trägheitsmoment durch eine Rotation um die entsprechende Achse gegeben ist, $J_x x = \int \mathrm{d}m(y^2 + z^2) = \int \mathrm{d}m(r^2 - x^2)$. Die hier gegebene Form ist abhängig vom gewählten Bezugssystem (wo ist z. B. die x-Achse?), lässt sich aber in andere Bezugssysteme umrechnen.

Warum so kompliziert?

Wir betrachten nun die Rotationsenergie eines um eine beliebige Achse drehenden Körpers. Für ein einzelnes infinitesimales Massenelement Δm_i gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 &= \frac{1}{2}\Delta m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r_i}\right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Delta m_i \left[\vec{\omega}^2 \vec{r_i}^2 - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r_i}\right)^2\right],\end{aligned}$$

wo wir die Vektoridentität

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{A}^2 \vec{B}^2 - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)^2$$

verwendet haben. Um die gesamte Rotationsenergie des Körpers zu finden integrieren wir nach $\mathrm{d}m$.

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{rot}} &= \frac{\omega^2}{2}\int \mathrm{d}m r^2 - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}m\,(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2 \\
&= \frac{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}{2}\int \mathrm{d}m\left(x^2+y^2+z^2\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}m\,(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z y)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\omega_x^2 J_{xx}+\omega_y^2 J_{yy}+\omega_z^2 J_{zz}\right) \\
&\quad +\omega_x\omega_y J_{xy}+\omega_x\omega_z J_{xz}+\omega_y\omega_z J_{yz}.
\end{aligned}
$$

Dieser komplizierte Ausdruck kann einfacher in Matrixschreibweise geschrieben werden:

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\vec{\omega},$$

was folgendes bedeutet

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)\left(\begin{array}{ccc} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{array}\right).$$

Alle Elemente des Trägheitstensors tragen also zur Rotationsenergie bei, wenn der Körper um eine beliebige Achse rotiert!

Der Trägheitstensor ist symmetrisch und daher diagonalisierbar. Bildlich kann man sich dies so vorstellen: Wir berechnen für eine Rotation um eine beliebige Achse $\vec{\omega}$ durch einen Punkt P das Trägheitsmoment J. Danach zeichnen wir auf der Achse einen Punkt im Abstand $k/\sqrt{J} =$. Nun variieren wir die Achse und wiederholen das Verfahren für alle möglichen Achsen. Auf diese Weise bilden wir eine Fläche entlang der $R^2 J = k^2 = \mathrm{const}$. Diese Fläche bildet ein Ellipsoid, das sog. **Trägheitsellipsoid**.

Die längste Hauptachse zeigt entlang der Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment. Die Hauptachsen des Trägheitsellipsoids heißen **Hauptträgheitsachsen** und zeichnen genau das Koordinatensystem aus, in dem der Trägheitstensor diagonal wird. Nach Konvention werden sie der Größe nach sortiert, $J_a \leq J_b \leq J_c$. Körper drehen sich stabil immer nur um die Achse mit dem größten oder dem kleinsten Trägheitsmoment.

Kreisel

Kreiselart	Hauptträgheitsmomente
asymmetrisch	$J_a \neq J_b \neq J_c$
symmetrisch	$\left\{ \begin{array}{c} J_a = J_b \neq J_c \text{ oder} \\ J_a \neq J_b = J_c \text{ oder} \\ J_a = J_c \neq J_b \end{array} \right.$
Kugel-	$J_a = J_b = J_c$

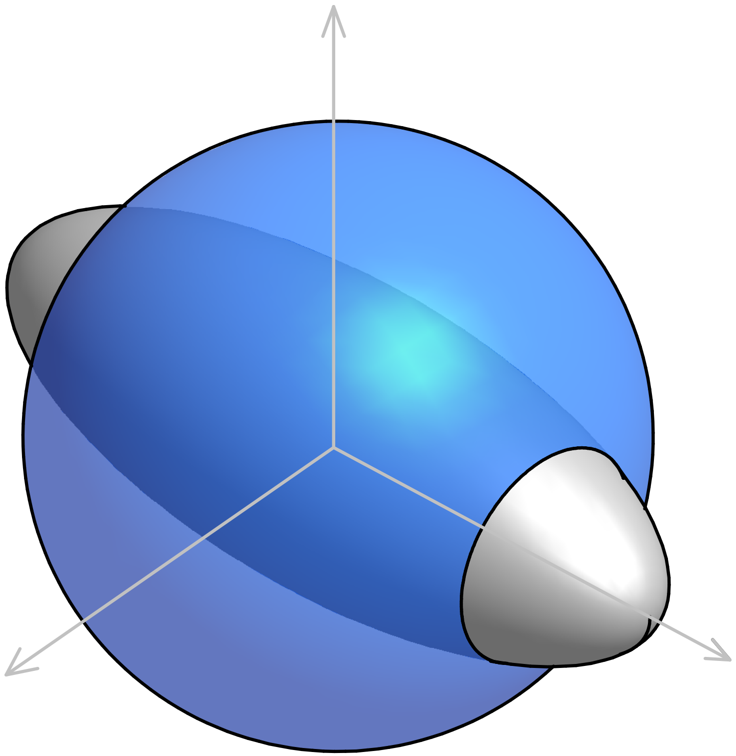
Kreiselbewegungen

Im System der Hauptträgheitsachsen lautet der Ausdruck für die kinetische Energie und den Drehimpuls

$$\begin{aligned} L^2 &= L_a^2 + L_b^2 + L_c^2 = \text{const.} \\ E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}\left(\omega_a^2 J_a + \omega_b^2 J_b + \omega_c^2 J_c\right) = \frac{L_a^2}{2J_a} + \frac{L_b^2}{2J_b} + \frac{L_c^2}{2J_c}, \end{aligned}$$

eine Gleichung für eine Kugel mit Radius L^2 und ein Ellipsoid mit Hauptachsen $\sqrt{2J_a}$, $\sqrt{2J_b}$ und $\sqrt{2J_b}$. Bei jeder Bewegung muss also der Drehimpulsvektor auf der Schnittmenge des Kreises mit dem Ellipsoid liegen.

Kreiselbewegungen II



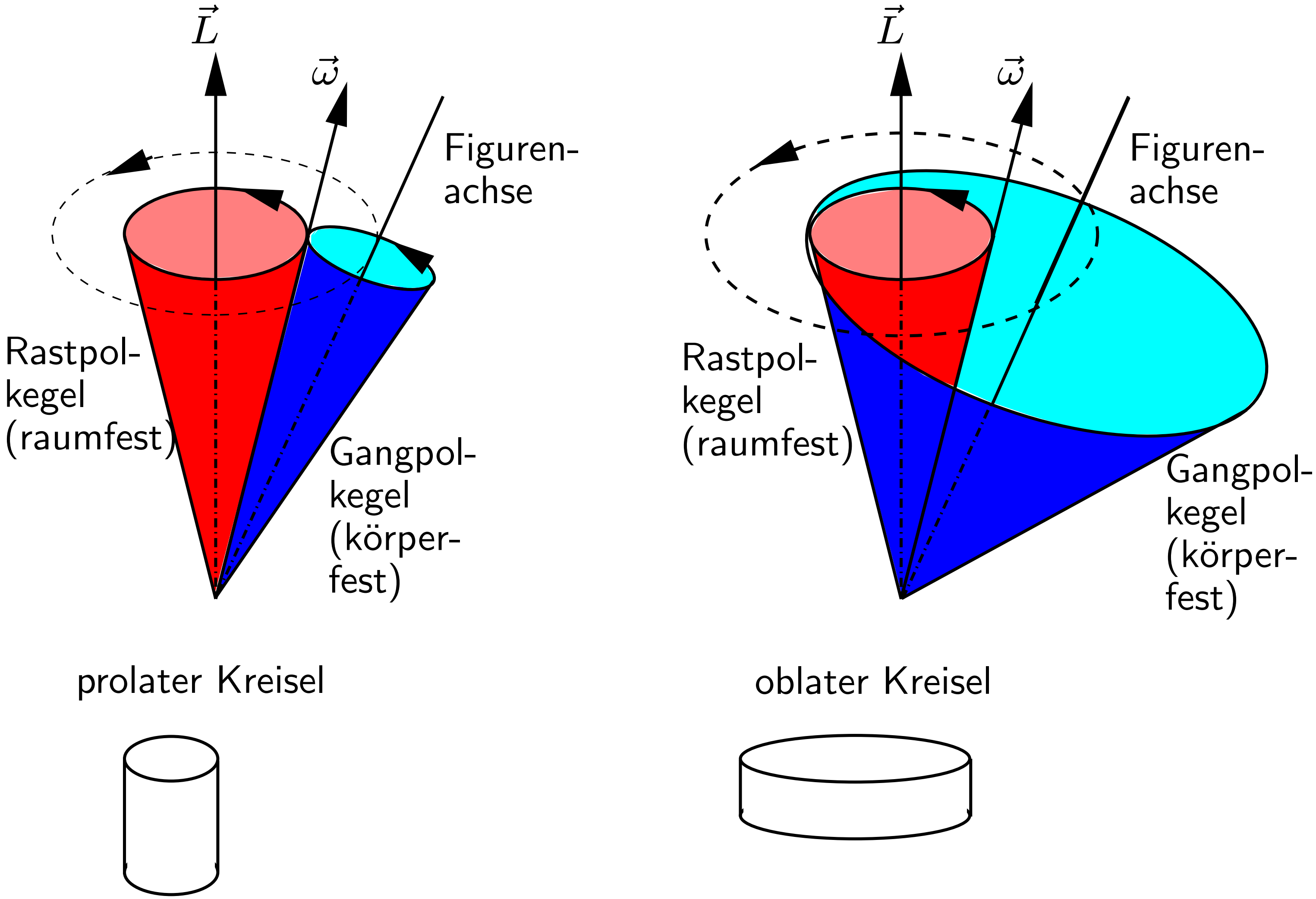
Nutation

Kräftefreier ("drehmomentfreier") symmetrischer Kreisel (Bsp. Fahrradkreisel)

$$\vec{M} \equiv \vec{0} \Longrightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Allgemeinste Bewegung gegeben durch drei Achsen:

- raumfeste Drehimpulsachse $\vec{L}$
- momentane Rotationsachse $\vec{\omega}$ (ändert sich laufend!)
- Figurenachse


$\vec{L}$
$\vec{\omega}$
Figuren-
achse
Rastpol-
kegel
(raumfest)
Gangpol-
kegel
(körper-
fest)
prolater Kreisel
$\vec{L}$
$\vec{\omega}$
Figuren-
achse
Rastpol-
kegel
(raumfest)
Gangpol-
kegel
(körper-
fest)
oblater Kreisel

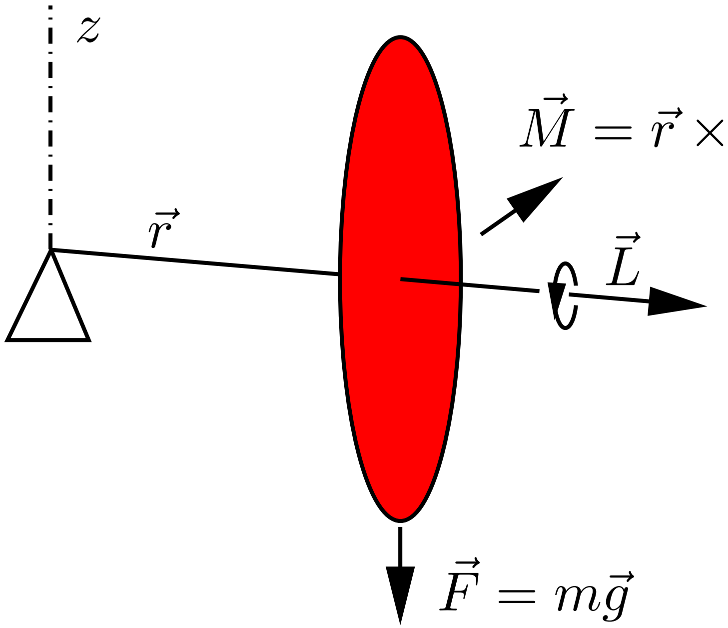
Präzession

Greift an einem Kreisel ein Drehmoment an, so ist er nicht mehr kräftefrei (drehmomentfrei) und der Drehimpuls ist nicht mehr eine erhaltene Größe:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}.$$

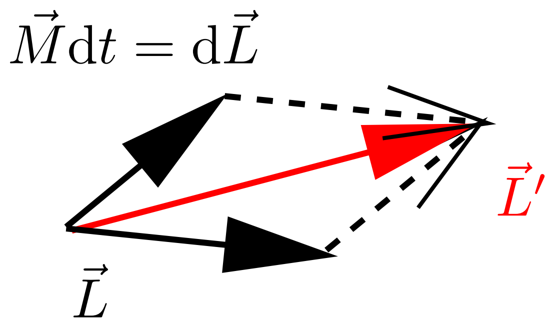
Dieses Drehmoment führt zum Auftreten der Präzession.

kräftefreier Kreisel	Nutation
angreifendes Drehmoment	Präzession



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

Das während einer kurzen Zeit angreifende Drehmoment $\vec{M}$ bewirkt eine kleine Änderung des Drehimpulses $\mathrm{d}\vec{L} \parallel \vec{M}$

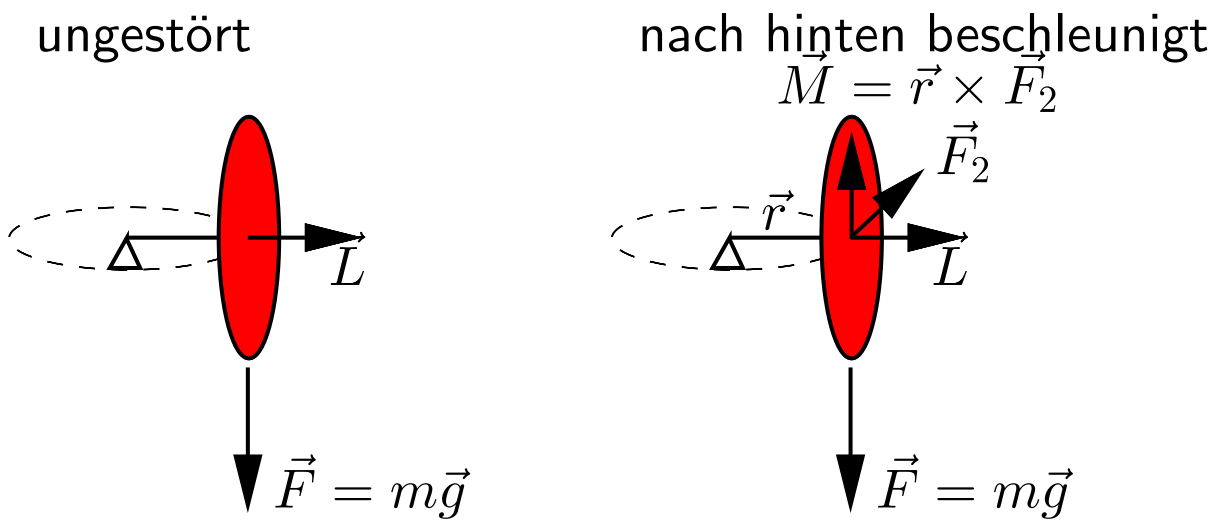


$$\vec{L}' = \vec{L} + \vec{M}\mathrm{d}t$$

Die Präzession führt zu einer Drehung um die Achse z mit der Präzessionsgeschwindigkeit $\omega_P = |\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}|\ |\frac{1}{\vec{L}}| = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|}$

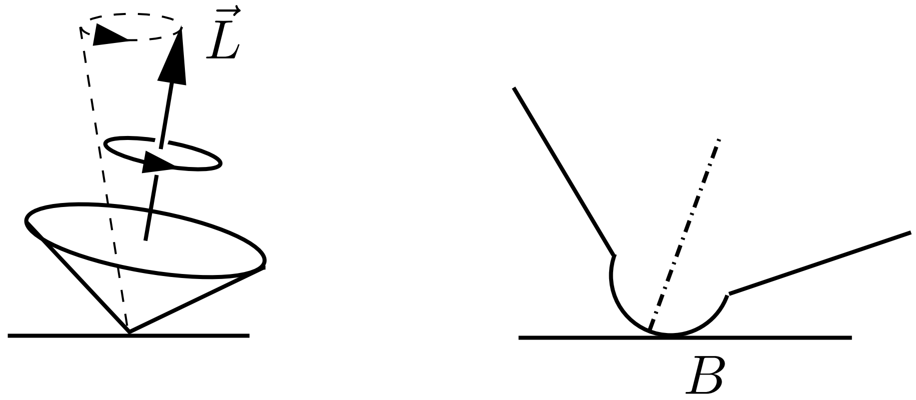
Präzession II

Versucht man den Radkreisel entlang seiner Präzessionsbewegung zu beschleunigen, so erfährt er ein Drehmoment, welches nach oben zeigt. Das Rad muss sich also aufrichten. Versucht man den Kreisel entlang der Präzessionsbewegung abzubremsen, so sinkt er. Dies erklärt, warum sich Spielkreisel aufrichten.



Aufrichten eines Kinderkreisels

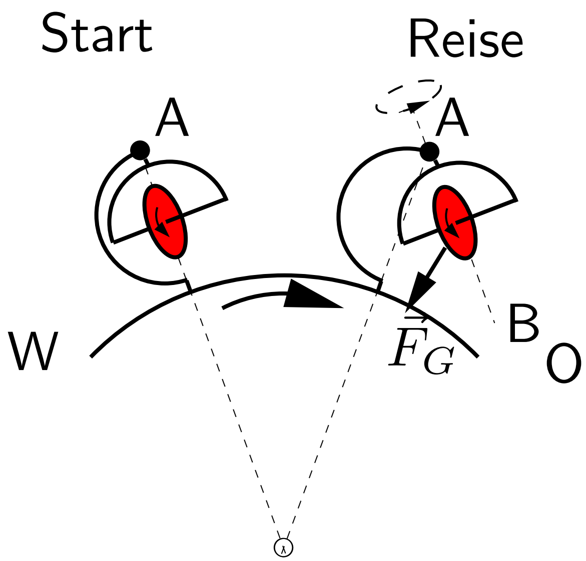
Die Reibungskraft im Punkt B führt zu einer Beschleunigung in Richtung der Präzessionsbewegung. Der Kreisel richtet sich auf.



Ohne etwas Reibung kein Aufrichten, bei zu viel Reibung verlangsamt sich der Kreisel aber zu schnell.

Der Kreiselkompass

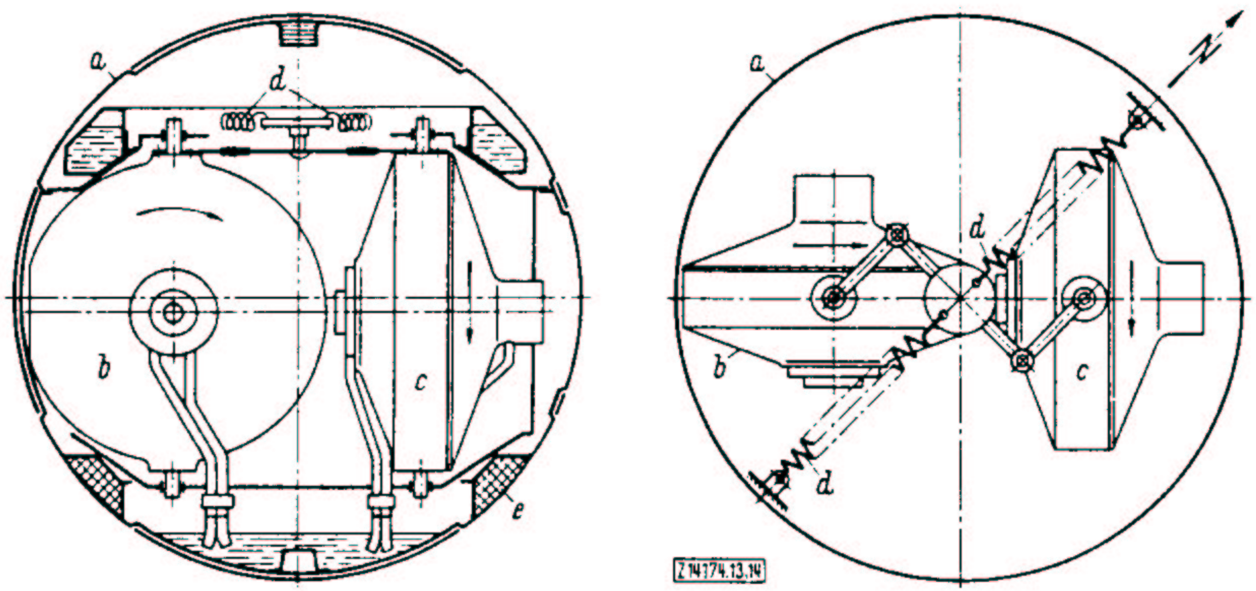
Der Kreiselkompass soll immer die Nordrichtung angeben. Dazu kann die Erdanziehung ausgenutzt werden, die immer zum Erdmittelpunkt zeigt. Patent: Anschütz Kiel.



Die Erdanziehung $\vec{F}_G$ zeigt immer zum Erdmittelpunkt. Dadurch erfährt der Kreisel ein Drehmoment, welches die Kreiselrichtung um genau den Winkel verdreht, der notwendig ist, um den Kompass wieder nach Norden zeigen zu lassen.

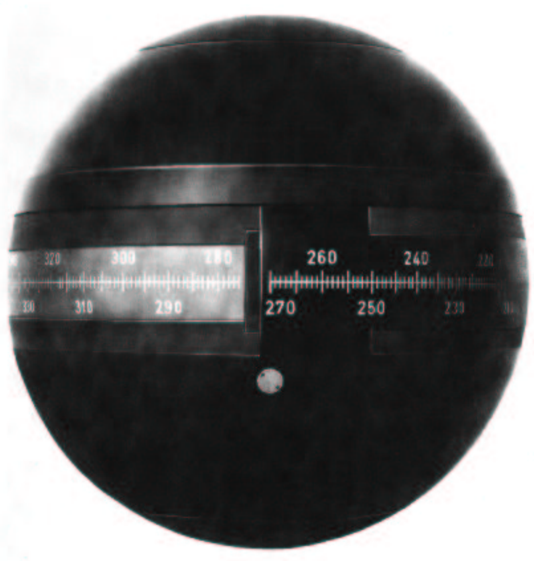
Der Kreiselkompass von Anschütz

Auf Schiffen ist die Halterung/Lagerung ein Problem. Dieses wurde hier in Kiel durch Anschütz gelöst.



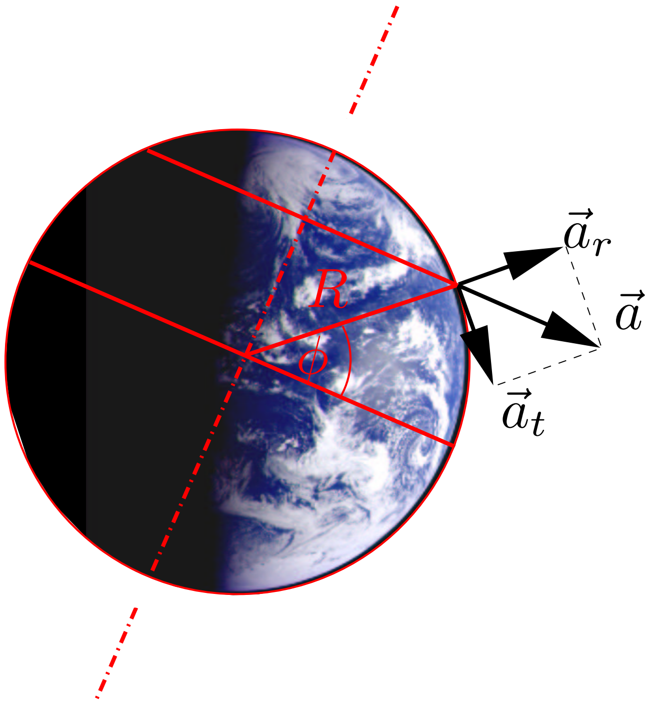
Der Kreiselkompass von Anschütz II

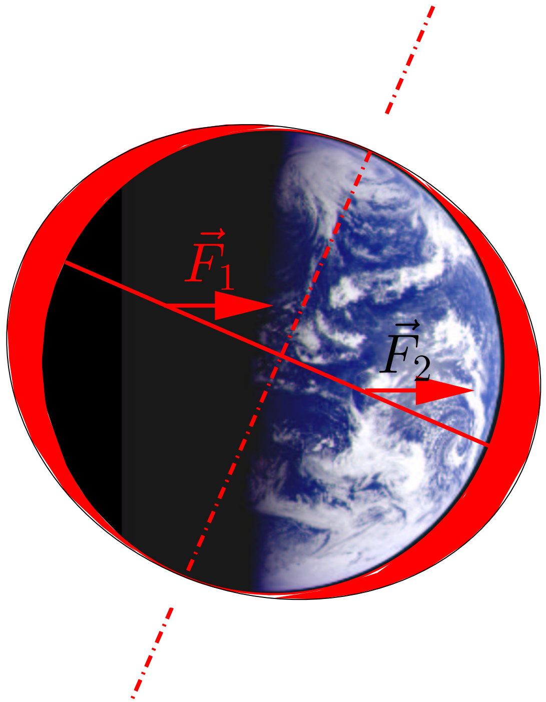
Auch berühmte Leute waren mit von der Partie. . . A. Einstein war am Patent beteiligt und besuchte deswegen mehrmals Anschütz in Kiel.



Präzession der Erdachse

Erdrotation $\longrightarrow$ Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a} = \omega^2 R \cos\phi \approx 3.4 \cos\phi$ cm/s^2.

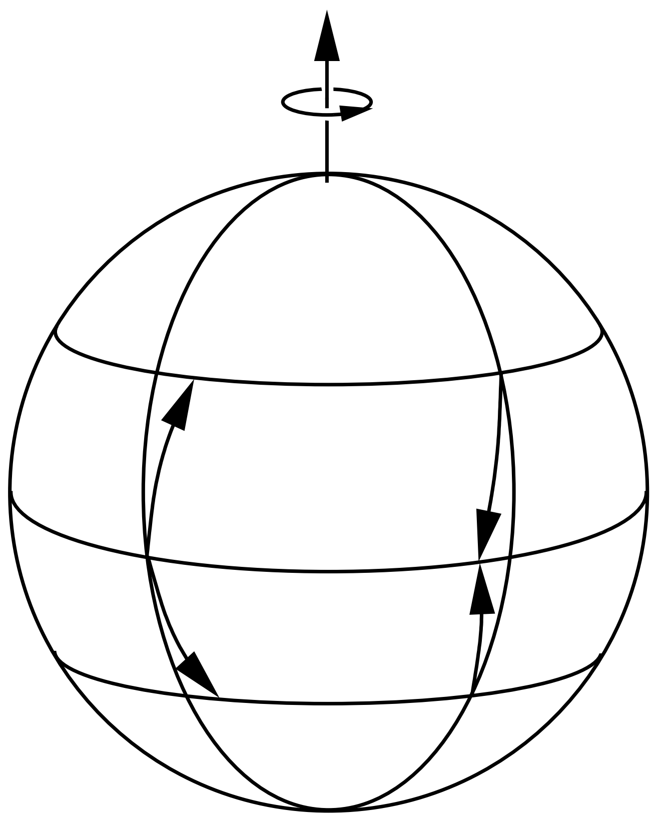




Die Tangentialkomponente führt zur Ausbildung von “Wülsten” entlang des Äquators. Diese werden verschieden stark von der Sonne angezogen, was einem Drehmoment auf die Erde gleichkommt. Folge: der Drehimpuls der Erde bleibt nicht konstant. Die Erdachse präzessiert einmal in ca. 26’000 Jahren.

Der Unterschied in der Anziehung verschwindet im Frühling und im Herbst und ist auch im Sommer und Winter nicht gleich stark. Diese Unterschiede führen, zusammen mit dem Einfluss des Mondes, zu kleineren Schwankungen des Drehimpulses, welche in der Astronomie “Nutation” genannt werden, auch wenn es sich streng genommen nicht um eine Nutation handelt.

Rotierende Bezugssysteme: Die Corioliskraft

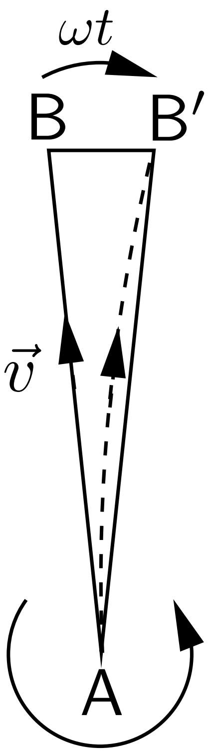


In der Nordhalbkugel wird
nach rechts abgelenkt;
in der Südhalbkugel wird
nach links abgelenkt.

Corioliskraft

Ursprung von Zyklonen und
Antizyklonen.
Abnutzung von Bahngeleisen.

Corioliskraft II



Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer rotierenden Scheibe von A aus mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ nach B hin. Infolge der Rotation erreicht er aber nach einer Zeit t den Punkt B′. Für mitrotierende Beobachter scheint der Massenpunkt also einer Kraft ausgesetzt, die während der Zeit t gewirkt hat.

$AB = vt$, ferner $BAB' = \omega t$
$BAB' = BB'/AB$ also $BB' = \omega v t^2$
Mit $s = \frac{1}{2} a_v t^2$ ist also $BB' = \omega v t^2 = \frac{1}{2} a_v t^2$,
also $a_v = 2\omega v$.

Bewegungen in rotierenden Bezugssystemen

Betrachte zwei Bezugssysteme K und K', deren Ursprung zusammenfällt, K' aber gegen K rotiert, also kein Inertialsystem sei. Wie wir bereits gesehen haben, lässt sich jede Bewegung eines starren Körpers, also insbesondere eines als starr vorausgesetzten Bezugssystems, als Überlagerung einer Translation und einer Rotation darstellen. Also lautet der Zusammenhang zwischen zwei Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{v}'$ gemessen in K bzw. K'

$$\vec{v} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \,, \tag{1}$$

wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit ist, die in K' gemessen wird, wenn man die Rotation nicht berücksichtigt. Die Beschleunigung $\vec{a}$ erhalten wir durch Ableitung nach der

Zeit

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \left(\vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right),$$

weil ja $\vec{\omega} = \text{const}$. Wir bestimmen nun $\mathrm{d}\vec{v}'/\mathrm{d}t$ im Koordinatensystem K, aber in Koordinaten von K' ausgedrückt. Dabei muss berücksichtigt werden, dass sich nicht nur die Geschwindigkeit ändert, sondern auch die das Bezugssystem aufspannenden Einheitsvektoren $\vec{\hat{e}}'_x, \vec{\hat{e}}'_y, \vec{\hat{e}}'_z$. Also

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\hat{e}}'_x \frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t} + \vec{\hat{e}}'_y \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t} + \vec{\hat{e}}'_z \frac{\mathrm{d}v'_z}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_x}{\mathrm{d}t} v'_x + \frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_y}{\mathrm{d}t} v'_y + \frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_z}{\mathrm{d}t} v'_z\right) = \vec{a}' + (\omega \times \vec{v}')\,.$$

Einsetzen liefert

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\omega} \times \vec{v})\,.$$

Nun setzen wir den allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ein, Glg. 1,

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\,(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,.$$

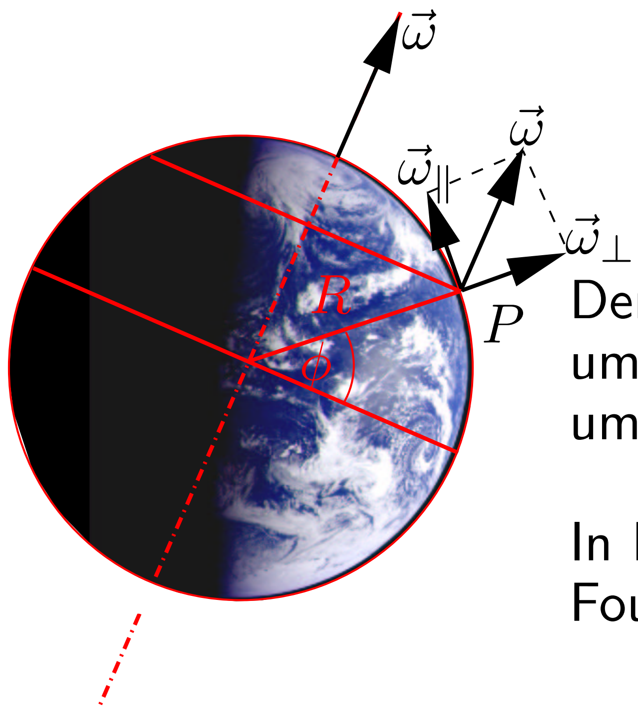
Diesen Ausdruck können wir nun endlich auflösen nach der Beschleunigung $\vec{a}'$, welche im rotierenden Bezugssystem K' gemessen wird

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} + 2\,(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) \\ &= \vec{a} + \vec{a}_C + \vec{a}_Z \end{aligned}$$

Coriolisbeschleunigung	$\vec{a}_C = 2\,(\vec{v}' \times \vec{\omega})$
Zentrifugalbeschleunigung	$\vec{a}_Z = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$

Im beschleunigten Bezugssystem wirken zwei Scheinkräfte, die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft!

Nachweis der Erdrotation - Das Foucault'sche Pendel



Die Rotation der Erde macht sich in einem Punkt P bemerkbar als eine Überlagerung einer Rotation der Ebene um $\vec{\omega}_{\perp}$ und eine weitere Rotation um $\vec{\omega}_{\|}$.

Der Erdboden im Punkt P rotiert mit $\vec{\omega}_{\perp} = \omega \sin \phi$ um eine Achse senkrecht zum Erdboden und mit $\vec{\omega}_{\|} = \omega \cos \phi$ um eine Achse parallel zu $\vec{\omega}_{\|}$.

In Kiel ($\phi \approx 54°$) dreht sich die Erde mit ca. 12° unter einem Foucault'schen Pendel weg.

Beispiele

- Eisenbahn: Auf der Nordhalbkugel nutzen sich die rechte Schiene und die rechten Räder schneller ab.

- Zyklone und Antizyklone auf den beiden Hemisphären drehen sich im gegenläufigen Sinne

- Passatwinde

- Flussläufe auf der Nordhalbkugel sollen rechts höhere Ufer aufweisen als links. Umgekehrt auf der Südhalbkugel.

- Der Wirbel in der Badewanne wird allerdings durch andere Effekte wesentlich stärker beeinflusst, weshalb hier die Voraussage nicht erfüllt wird.