V9: Wellen in Plasmen II

- Allgemeine Wellengleichung
- Allgemeine Dispersionsgleichung
- Dieelektrizitätskonstante, -funktion
- Energie in Wellen
- MHD-Wellen: Alfven- und magnetosonische Wellen

Allgemeine Wellengleichung

Beim letzten Mal haben wir gesehen, dass Wellen sich in einem Plasma ausbreiten können. Als die drei einfachsten Wellen in einem unmagnetisiertem Plasma haben wir die elektrostatischen Langmuir und Ionen-akustischen Wellen, sowie die ordentliche (ordinary) elektromagnetische Welle gefunden. Wenn im Plasma auch ein magnetisches Feld vorhanden ist, führt das zu einer Grosszahl von weiteren möglichen Wellenmoden. Andererseits führen die komplexen Interaktionen zwischen den Teilchen und Feldern dazu, dass nur eine endliche Anzahl von Wellen sich ausbreiten können: die Eigenmoden des Plasmas. Um die möglichen Zweige zu bestimmen wird eine allgemeine Prozedur, die sogenannte Allgemeine Dispersionsgleichung des Plasmas bestimmt.

Wir schreiben die Maxwell Gleichgungen auf und berücksichtigen dabei eine selbkonsistenten Strom $\vec{j}$, der die zahlreichen Beiträge der beweglichen Plasmateilchen berücksichtigt. Die selbst konsistente Ladungsdichte im Plasma nennen wir ρ. Zusätzlich zu diesen selbskonsistenten Quellen des Feldes kann es äussere Ströme und Ladungen, $\vec{j}_{\mathrm{ex}}, \rho_{\mathrm{ex}}$ geben, die die Quellen des e-m Feldes sind, welches auf das Plasma wirkt. Aus den Maxwell Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_{\mathrm{ex}} \right) \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho + \rho_{\mathrm{ex}} \right)
\end{aligned}
$$

Folgt mit $\nabla \times (\nabla \times \vec{E})$ und Einsetzen von $\vec{B}$ die Wellengleichung:

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{j}_{\mathrm{ex}}}{\partial t} \right)$$

Die Maxwell Gleichungen sind linear in Ladung und Feldern und für kleine Störungen ergibt sich näherungsweise ein linearer Zusammenhang zwischen Strom $\vec{j}$ und Feld $\vec{E}$, welcher einem zeitlich veränderlichem Ohmschen Gesetz entspricht. Dieses System kann gelöst werden, wenn der Leitfähigkeitstensor σ bekannt ist. Dieser Tensor hängt von der Plasmadynamik, und damit auch vom gewählten Plasmamodell ab. Wenn man annimmt, dass das Plasma linear auf die Wellenanregung reagiert, wird damit die Leitfähigkeit unabhängig von der Wellenamplitude und die Wellengleichung kann nur für die Störungen $\delta\vec{E}$ betrachtet werden:

$$\nabla^2\delta\vec{E} - \nabla(\nabla\cdot\delta\vec{E}) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\delta\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

mit dem Ohmschen Gesetz

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \int d^3x' \int_{-\infty}^{t} dt'\vec{\sigma}(\vec{x}-\vec{x'}, t-t')\cdot\delta\vec{E}$$

Die obere Gleichgung ist die allgemeine lineare Wellengleichung, sie gilt für jedes Medium mit einer lineare Antwort auf äussere Fluktuationen. Die linke Seite repräsentiert den elektromagnetischen Anteil (unabhängig vom Medium). Die Antwort des Mediums ist im fluktuierenden Strom, welcher proportional zum fluktuierenden Feld ist, und damit im fluktuierenden Leitfähigkeitstensor σ enthalten.

Allgemeine Dispersionsgleichung

Mit dem Ansatz für ebene Wellen vereinfacht sich die allgemeine Wellengleichung:

$$\left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{I} - \vec{k}\vec{k} - i\omega\mu_0\vec{\sigma}(\omega,\vec{k})\right] \cdot \delta\vec{E}_0(\omega,\vec{k}) = 0$$

mit der konstanten Wellenamplitude $\delta\vec{E}_0(\omega,\vec{k}) = 0$. Da die Amplituden reell sind, gelten die Symmetriebedingungen:

$$\begin{aligned} \delta\vec{E}^*(\omega,\vec{k}) &= \delta\vec{E}(-\omega,-\vec{k}) \\ \vec{\sigma}^*(\omega,\vec{k}) &= \vec{\sigma}(-\omega,-\vec{k}) \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems erfordert, dass die Determinante der Klammer verschwindet. Wir definieren die Verschiebungsdichte

$$\delta\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \delta\vec{E}$$

mit dem Dielektrizitätstensor $\vec{\epsilon}$, der ebenfalls symmetrisch ist. Damit wird die Stromdichte

$$\delta\vec{j}(\omega, \vec{k}) = -i\omega\epsilon_0[\epsilon(\omega, \vec{k}) - \vec{I}] \cdot \delta\vec{E}(\omega, \vec{k})$$

Mit dieser Version des Ohmschen Gesetzes kann der Strom durch das Wellenfeld ersetzt werden. Die Dielektrizitätstensor ist definiert als

$$\epsilon(\omega, \vec{k}) = \vec{I} + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \vec{\sigma}(\omega, \vec{k})$$

Damit wird die Dispersionsrelation

$$\mathrm{Det}\left[\frac{k^2 c^2}{\omega^2}\left(\frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} - \vec{I} + \epsilon(\omega, \vec{k})\right)\right] = 0$$

Dies ist die allgemeine Dispersionsrelation für ein aktives Medium. Sie beschreibt die Ausbreitung von lineares Wellen der Frequenz $\omega = \omega(\vec{k})$. Als Eigenwertgleichung hat sie nur eine endliche Anzahl von Lösungen. Um diese Lösungen zu finden, muss zunächst der Dielektrizitätstensor des Plasma bestimmt werden, also die linearen Plasmagleichungen. Diese Lösung hängt von dem gewählten Plasmamodell ab.

Dieelektrizitätskonstante, -funktion

Der Dielektrizitätstensor beschreibt alle relevanten (linearen) Eigenschaften des Plasmas. Im allgemeinen ist der Tensor anisotrop. Ohne externes Magnetisches Feld (unmagnetisiertes Plasma) wird der Tensor isotrop. Damit vereinfacht sich die Dispersionsrelation, da die einzige ausgezeichnete Richtung im Plasma entlang des Wellenvektors ist. Der *longitudinale Einheitstensor*

$$\vec{I}_L = \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2}$$

Beschreibt die Richtung der elektrostatischen Fluktuationen.

Der *transversale Einheitstensor*

$$\vec{I}_T = \vec{I} - \vec{I}_L = \vec{I} - \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2}$$

beschreibt die Ausbreitungsrichtung des elektromagnetischen Anteils. Damit kann der Dielektrizitätstensor in longitudinal und transversal Anteil zerlegt werden

$$\epsilon(\omega, \vec{k}) = \epsilon_L(\omega, k)\vec{I}_L + \epsilon_T(\omega, k)\vec{I}_T$$

Die Koeffizienten sind jetzt skalare Funktionen, da sie nur von Frequenz und Wellenzahl, aber nicht der Richtung der Wellenzahl abhängen.

Wenn die isotrope Dieelektrizitätstensor bekannt ist, können diese beiden Funktionen durch beidseitiges Multiplizieren von ϵ mit $\vec{k}$ berechent werden

$$\begin{aligned} \epsilon_L(\omega, k) &= \frac{\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{k}}{k^2} \\ \epsilon_T(\omega, k) &= \frac{\mathrm{tr}\vec{\epsilon}(\omega, \vec{k}) - \epsilon_L(\omega, k)}{2} \end{aligned}$$

Im isotropen Plasma wird der Dispersionstensor einfach:

$$\mathrm{Det}\left[\epsilon_k l(\omega, k)\vec{I}_L + \left(\epsilon_T(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)\vec{I}_T\right] = 0$$

Die zwei Tensoren sind linear unabhängig und die zwei Dispersionsrelationen im isotropen Plasma werden zu zwei entkoppelten skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} \epsilon_L(\omega, k) &= 0 \\ \epsilon_T(\omega, k) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} &= 0 \end{aligned}$$

für die longitudinal und transversal elektromagnetischen Wellen, die im Plasma propagieren können.

Die *Dieelektrische Antwort Funktion* ergibt sich

$$\epsilon(\omega, \vec{k}) = \frac{\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{k}}{k^2}$$

Energie in Wellen

Alle Wellen enthalten Energie, auch wenn sich die Wellenamplitude über mehrere Wellenzüge wegmittelt. Diese Energie ist die Energie der elektrischen und magnetischen Fluktuationen, die durch das Plasma mit der Gruppengeschwindigkeit transportiert wird.

Für Langmuir Wellen haben wir folgende Dispersionsrelation erhalten

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2(1 + \gamma_e k^2 \lambda_D^2)$$

Aus der Quantenmechanik wissen wir, dass zu jeder Frequenz eine quantisierte Energie $\hbar\omega$ gehört. Damit lässt sich die Energie eines einzelnen Langmuir Wellen Paketes berechnen, ein *Langmuir Plasmon*. Die Energie eines Teilchens mit der

Ruhemasse m_0 kann, für kleine Geschwindigkeiten, als

$$W = m_0 c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m_0}$$

geschrieben werden. Da der Impuls des Teilchens $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ der Gradient ist, können wir auch $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ schreiben. Damit kann die Diespersionsrelation für Langmuir Wellen auch geschrieben werden als:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_{pe}\left(1 + \frac{\gamma_e \vec{p}_l^2 \lambda_D^2}{2\hbar^2}\right)$$

Der Vergleich mit der Energie der Teilchen ergibt, dass die kinetische Energie des Plasmons $\hbar\gamma_e k^2 v_e^2/2$ ist. Die Ruhemasse des Teilchens ist $m_{0l} = \hbar\omega_{pe}/c^2$ und ist in der Regel sehr klein. Für den Sonnenwind mit $f_{pe} \approx 10\,$kHz ist $m_{0l} \approx 10^{-46}$ kg.

Eine Plasma Welle besteht aus vielen Plasmonen. Sie transportieren Energie durch das Plasma und verteilen dabei Energie und Informationen. Es ist wichtig einen makroskopischen Ausdruck für den mittleren Energiegehalt der einzelnen Plasma Wellen zu finden. In der Elektrodynamik wird der Energie Fluss einer elektromagnetischen Welle durch den Poynting Vektor beschrieben

$$\mu_0 \vec{P} = \delta \vec{E} \times \delta \vec{B}$$

Der Poynting Vektor $\vec{P}$ ist nichtlinear. Da er den Energiefluss beschreibt, beschreibt seine Divergenz die Abnahme der Wellenenergie W_w pro Volumen. Die Abnahme der Wellenenergie wird dabei durch die Änderungen der Energiedichten des elektrischen und magnetischen Feldes beschrieben. Für die Langmuir Welle ergibt sich, dass die Hälfte der Wellenenergie in der thermischen Elektronenbewegung gespeichert ist, die damit für die Polarisation des Plasma sorgt. Für die ionen-akustische Welle (lange- sowie kurze Wellenlängen) ergibt sich dasselbe.

MHD-Wellen: Alfvén- und magnetosonische Wellen

Ideale Magnetohydrodynamische Wellen können mit Hilfe des vorigen Kapitels behandelt werden, indem die Leitfähigkeitstensoren der Welle und die Dielektrizitätsfunktion bestimmt werden. Da aber die Gleichungen der idealen MHD relativ einfach sind, ist es leichter, diese zu linearisieren. Bei idealen stationären Bedingungen als Ausgangszustand des Ein-Flüssigkeiten Plasmas mit verschwindenden mittleren Geschwindigketen und elektrischen Feldern, Druckgleichgewicht, und verschwindendem magnetischem Stress gilt:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ E_0 &= 0 \\ \nabla(p_0 + B_0^2/2\mu_0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(\vec{B}_0 \cdot \nabla)\vec{B}_0 = 0$$

Plasma Dichte, Geschwindigkeit, magnetisches und elektrische Feld werden zerlegt in ihre Anfangsbedingungen plus zeitabhängige Fluktuationen

$$\begin{aligned}
n &= n_0 + \delta n \\
\vec{v} &= \delta v \\
\vec{E} &= \delta \vec{E} \\
\vec{B} &= \vec{B}_0 + \delta \vec{B}
\end{aligned}$$

Da die MHD Gleichungen nichtlineare Terme enthalten, müssen die Fluktuationen klein sein. Dies gilt, wenn das Hintergrundmagnetfeld viel grösser ist als die

Fluktuationen, eine übliche Annahme in der MHD. Damit wird die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \delta \vec{v} = 0$$

Die MHD Impulserhaltung wird zu

$$m_i n_0 \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\delta p + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{B}$$

Da das Plasma typischerweise schnelle Temperaturänderungen, die durch die Fluktuationen erzeugt werden, nicht ausgeichen kann, können wir den adiabatischen Druck verwenden, und die Druckänderung wird zu

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = m_i c_s^2 \frac{\partial \delta n}{\partial t} = -m_i n_0 c_s^2 \nabla \cdot \delta \vec{v}$$

Dabei is c_s die Schallgeschwindigkeit mit $c_s^2 = \gamma p_0/m_i n_0$. Das Induktionsgesetz wird nach Linearisierung zu

$$\frac{\partial \delta \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)\delta \vec{B} - \vec{B}_0(\nabla \cdot \delta \vec{v})$$

damit haben wir ein lineares und homogenes Gleichingssystem für δn, $\delta \vec{v}$ und $\delta \vec{B}$. Da wir ein gleichförmiges Plasma mit geraden Magnetfeldlinien angenommen haben, ist die Richtung des Hintergrundmagnetfeldes die einzige Symmetrierichtung. Wir wählen Richtung des Magnetfeldes als z-Achse: $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. Damit werden unsere Gleichungen zu

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} \quad = \quad v_A^2 \nabla_{\parallel} \left(\frac{\delta \vec{B}_{\perp}}{B_0} \right) - \nabla \left(\frac{\delta p}{m_i n_0} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta\vec{B}}{B_0}\right) \quad = \quad \nabla_{\|}\delta\vec{v}_{\perp} - \vec{e}_{\|}(\nabla_{\perp}\cdot\delta\vec{v}_{\perp})$$

mit der Alfven Geschwindigkeit v_A. Dieses Differentialgleichungssystem kann mit dem Ansatz ebener Wellen gelöst werden, oder indem eine Variable, zB $\delta\vec{v}$ in eine Wellengleichung überführt wird. Eine sinnvolle Lösung erhält man nur für $\delta\vec{v}_0 \neq 0$. Wir wählen ein rechtshändiges Koordinatensytem, in dem die senkrechte Komponente der Welle parallel zur x-Achse ist, so dass $\vec{k} = k_{\|}\vec{e}_{\|} + k_{\perp}\vec{e}_x$ Damit erhalten wir

$$\left[\begin{array}{ccc} \omega^2 - v_A^2 k_{\|}^2 - c_{ms}^2 k_{\perp}^2 & 0 & -c_s^2 k_{\|} k_{\perp} \\ 0 & \omega^2 - v_A^2 k_{\|}^2 & 0 \\ -c_s^2 k_{\|} k_{\perp} & 0 & \omega^2 - c_s^2 k_{\|}^2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \delta v_{0_x} \\ \delta v_{0_y} \\ \delta v_{0_z} \end{array}\right] = 0$$

Die Geschwindigkeitsfluktuationen in y-Richtung sind unabhängig von allen anderen Feldern, was zu einer Welle mit einer linearen Dispersionsrelation führt

$$\omega_A = \pm k_{\parallel} v_A$$

Diese Welle propagiert parallel zum Hintergrundfeld und ist eine transversal Welle. Diese Elektromagnetsiche Welle wird Alfvén (Scher) Welle genannt. Die magnetische Komponente dieser Welle ist parallel zur Geschwindigkeitskomponente, deshalb hat die Welle kein fluktuierendes Elektrisches Feld in Richtung $\vec{B}_0$. Das elektrische Feld der Welle zeigt in x-Richtung. Da die Magnetfeldfluktuationen klein sind, sind auch die Geschwindigkeitsfluktuationen klein. Die Frequenz der Alfven Welle geht linear mit der Wellenzahl, deshalb ist die Welle nicht dispersiv und ihre Energie fliesst entlang $\vec{B}_0$, da $v_{gr,A_{\parallel}} = v_A, v_{gr,A_{\perp}} = 0$. **Das Magnetfeld verhält sich wie eine schwingende Saite.**

Magnetosonische Welle

Die übrigen Matrixelemente stellen eine Beziehung zwischen der parallelen Geschwindigkeitskomponente $\delta v_{\|}$ und der anderen transversal Geschwindigkeit δv_x her. Die Dispersionsrelation dieser Welle folgt aus dem verschwinden der Determinante

$$\omega^4 - \omega^2 c_{ms}^2 k^2 + c_s^2 v_A^2 k^2 k_{\|}^2 = 0$$

Die zwei Lösungen beschreiben zwei Magnetosonische Wellen, die nur vom Winkel θ zwischen Magnetfeld und Wellenvektor abhängen: $k_{\perp}^2/k^2 = \sin^2\theta$. Die zwei Lösungen sind die schnelle und die langsame Magnetosonische Welle (vgl schnelle und langsame Schocks). Schnelle und langsame Schocks sind die Endzustände der schnellen und langsamen magnetosonischen Welle, die sich zu grossen Amplituden entwickeln. Für $k_\perp$ erhält man

$$\omega^2 = \frac{1}{2}k^2(c_{ms}^2 \pm c_{ms}^2)$$

Die schnelle Mode (Plus Zeichen) propagiert senkrecht mit der Phasengeschwindigkeit $v_{ph,f\perp} = c_{ms}$, während die langsame Mode (Minus Zeichen) nicht propagiert. Da die Alfven Welle auch nicht in die senkrechte Richtung propagiert, ist die schnelle magnetosonische Welle die einzige senkrechte MHD Welle.

Für die Parallele Ausbreitungsrichtung wird die Dispersionrelation

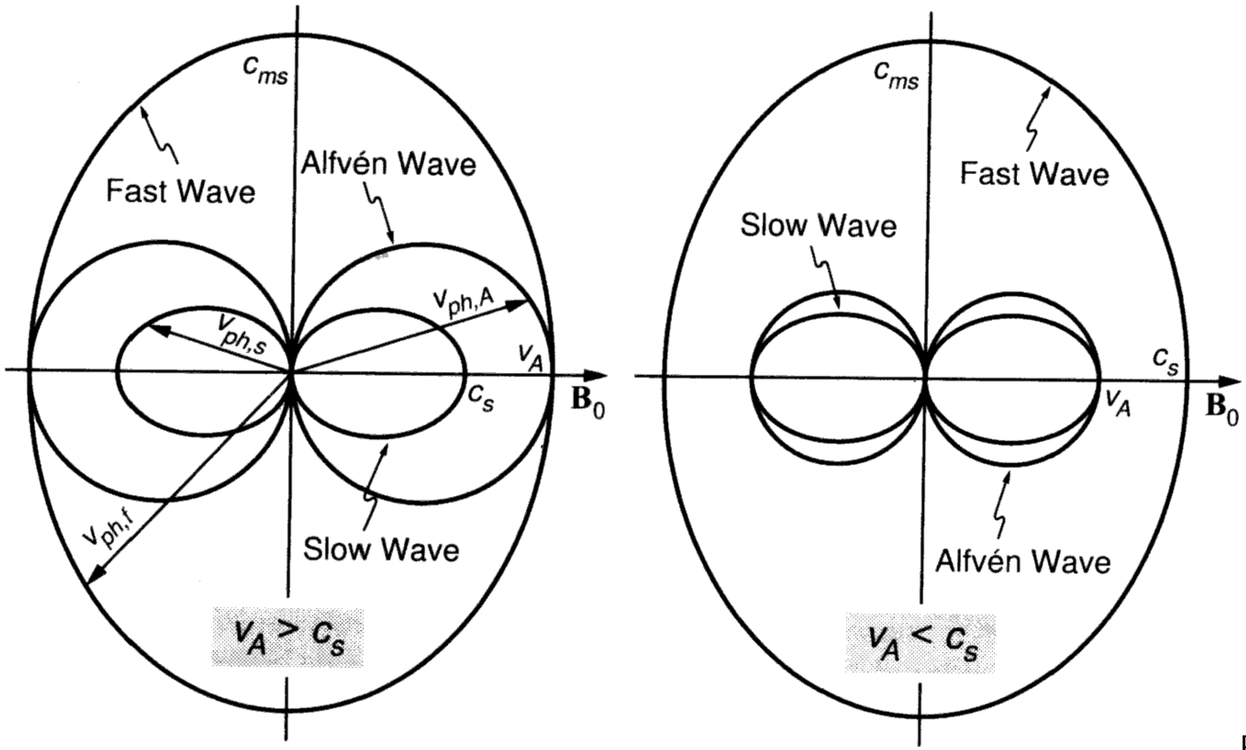
$$\omega^2 = \frac{1}{2}k^2[c_s^2 + v_A^2 \pm (c_s^2 - v_A^2)]$$

Für $v_A > c_s$ wird die parallele Phasengeschwindigkeit der langsamen Welle

$v_{ph,s\|} = c_s$. Sie ist eine reine Schallwelle, während sich die schnelle Welle mit der Alfven Geschwindigkeit ausbreitet: $v_{ph,f\|} = v_A$.

Im anderen Fall, wenn $c_s > v_A$, nähert sich die langsame Mode der Alfven Geschwindigkeit und die schnelle Welle hat die Schallgeschwindigkeit.

Phasengeschwindigkeit Diagramme der drei MHD Wellen (Baumjohann, 2006). $\vec{B}_0$ zeigt in x-Richtung. Die Länge der Vektoren entspricht der Phasen Geschwindigkeit unter dem entsprechenden Winkel. Das Bild kann als instantes Bild der Wellenfronten, die sich vom Urpsrung in alle Richtungen ausbreiten, aufgefasst werden.



Abhängigkeit der MHD Phasengeschwindigkeiten vom Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{B}_0$ (Baumjohann, 2006). Die Geschwindigkeit der schnellen Welle nimmt zwischen paralleler und senkrechter Richtung zu. Gleichzeitig nehmen die Alfven Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit der langsamen Welle ab.