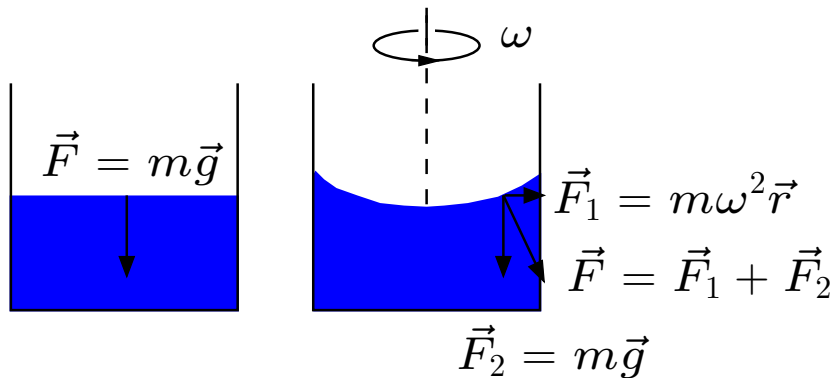


Hydrostatik

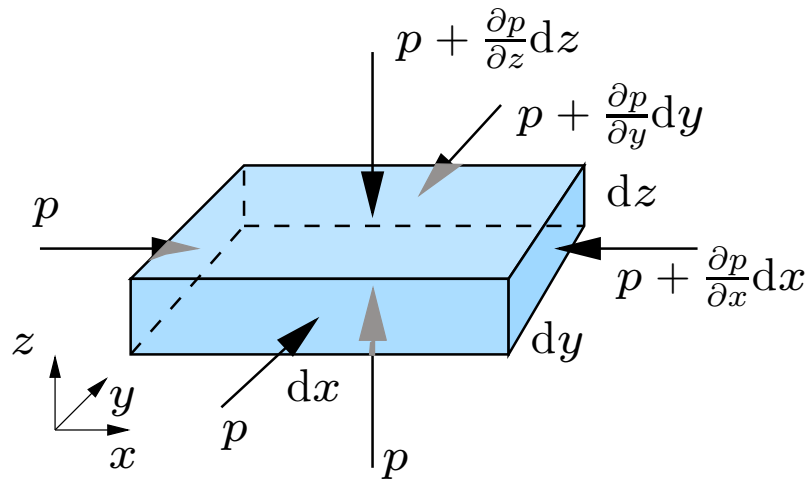


Wir werden vorerst nur ideale Flüssigkeiten untersuchen, für die sowohl Reibungskräfte wie auch Oberflächeneffekte vernachlässigbar sein sollen. Flüssigkeiten können damit ohne Kraftausübung deformiert werden, in ihrer Verformung kann keine Energie gespeichert werden. Einzelne Teilchen (z. B. Moleküle,

Massenelemente) können in einer idealen Flüssigkeit frei verschoben werden. Deshalb steht die Oberfläche einer idealen Flüssigkeit immer senkrecht zur angreifenden Kraft. Im hier gezeigten Beispiel kann der Winkel zwischen der Horizontalen und der Oberfläche, bzw. die Steigung, einfach berechnet werden:

$$\tan \alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} \longrightarrow z(r) = \frac{\omega^2}{g} \int dr r = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0$$

Druck in einer Flüssigkeit



Auf die untere Fläche eines quaderförmigen Flüssigkeitselementes möge ein Druck p wirken. Besteht in der Flüssigkeit ein Druckgradient, so wirkt auf die obere Fläche ein Druck $p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$ und die Kraft in z -Richtung ist

$$F_z = p dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy = -\frac{\partial p}{\partial z} dV.$$

Analog gilt für die x - und y -Komponenten $F_x = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dV$ und $F_y = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) dV$. Damit gilt allgemein:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} p \cdot dV.$$

Weil sich jedes Flüssigkeitselement frei bewegen kann, muss die Gesamtkraft auf ein ruhendes Flüssigkeitselement verschwinden. Ist das Eigengewicht der Flüssigkeit vernachlässigbar, gilt sogar $\vec{\nabla} p = 0$, der Druck ist überall in der Flüssigkeit gleich groß. Dieser Sachverhalt wird in hydraulischen Pressen ausgenutzt.



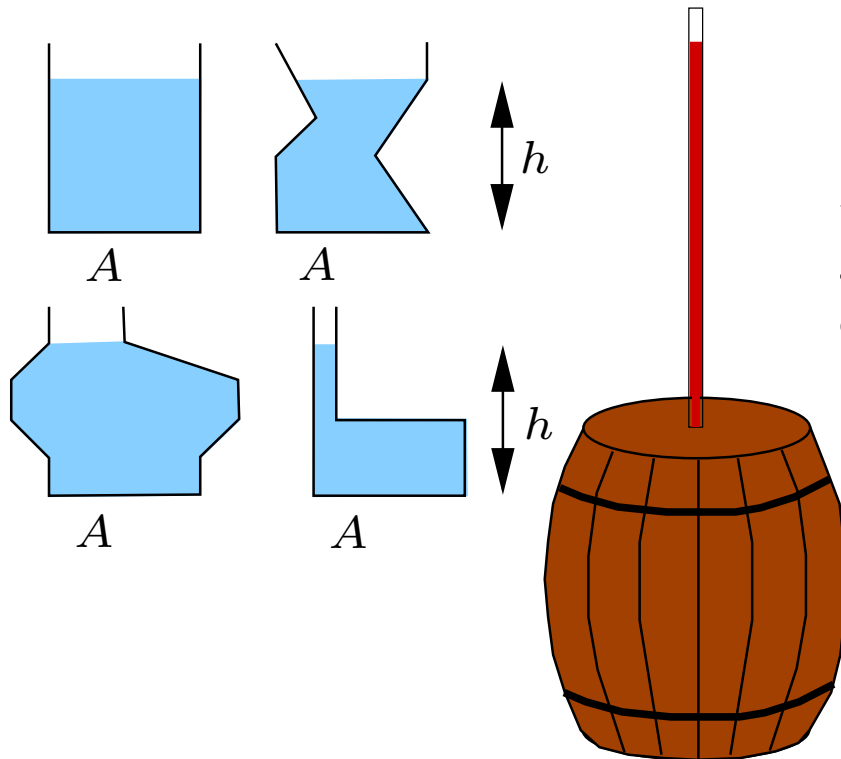
Spittellammsperre am Grimsensee.
(mit freundl. Genehmigung KWO).

Auf der Erde ist das Eigengewicht $\rho g dV$ einer Flüssigkeit in der Regel nicht vernachlässigbar. Die äußere Gravitationskraft führt zu einem Druckgradienten und der Druck auf die Grundfläche A einer mit einer **inkompressiblen** Flüssigkeit gefüllten Säule der Höhe h ist

$$p(h) = \int_0^h dz \frac{\rho \cdot g \cdot A}{A} = \rho \cdot g \cdot h + p_0.$$

An der Oberkante gilt $p(h) = p_0$ und folglich $p(z) = \rho \cdot g \cdot (h - z) + p_0$.

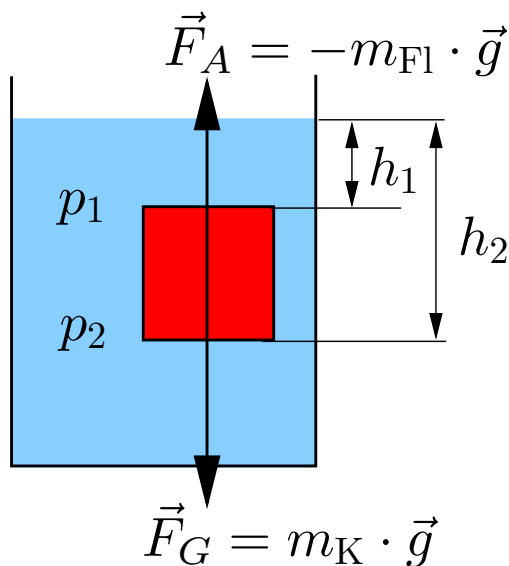
Hydrostatisches Paradoxon



Weil der Schweredruck einer Wassersäule der Höhe h nur von der Dichte ρ und der Höhe h abhängt, ist der Druck auf die Grundfläche A in allen links abgebildeten Gefäßen gleich groß¹, selbst wenn doch das Gesamtgewicht der Flüssigkeiten stark variiert. Deshalb kann man ein volles Weinfass mit nur einem zusätzlichen Glas Wein zum Bersten bringen (Blaise Pascal).

¹Reibung spielt keine Rolle, weil sich die Flüssigkeit nicht bewegt.

Hydrostatischer Auftrieb (Archimedisches Prinzip)



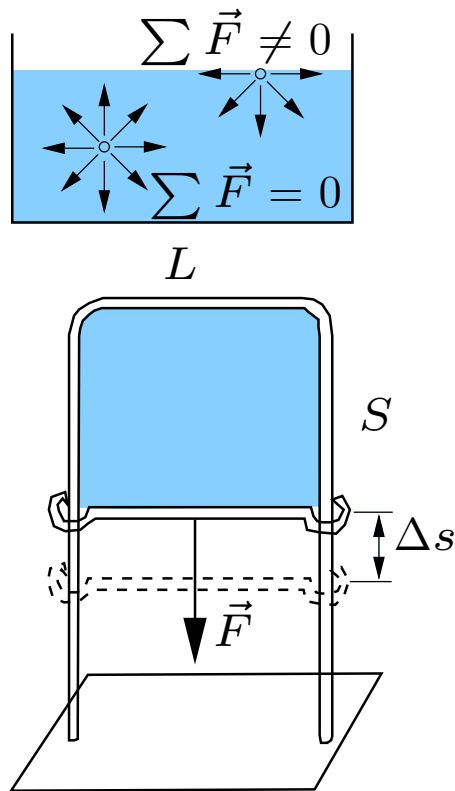
Ein Körper K , z. B. ein Quader, der Dichte ρ_K und Volumen $V = \Delta h \cdot A$ sei in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_{F1} eingetaucht. Die Gravitationskraft ist $\vec{F}_G = m\vec{g}$. Zwischen seiner Ober- und Unterkante besteht ein Druckunterschied $\Delta p = \rho_{F1} \cdot g \cdot \Delta h$. Dies führt zu einer Auftriebskraft

$$\vec{F}_A = \Delta p \cdot A \cdot \vec{e}_z = \rho_{F1} g A \Delta h \vec{e}_z = -m_{F1} \cdot \vec{g}.$$

Dies gilt natürlich auch für beliebig geformte Körper. Auf jedes Volumenelement wirkt neben $\vec{F}_G = \rho_K \vec{g} dV$ auch $\vec{F}_A = -\vec{\nabla} p dV$.

$$\text{Mit } \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{g} \text{ gilt } \vec{A} = -\vec{g} \int dV \rho_{F1} = -\vec{G}_{F1}.$$

Oberflächenspannung

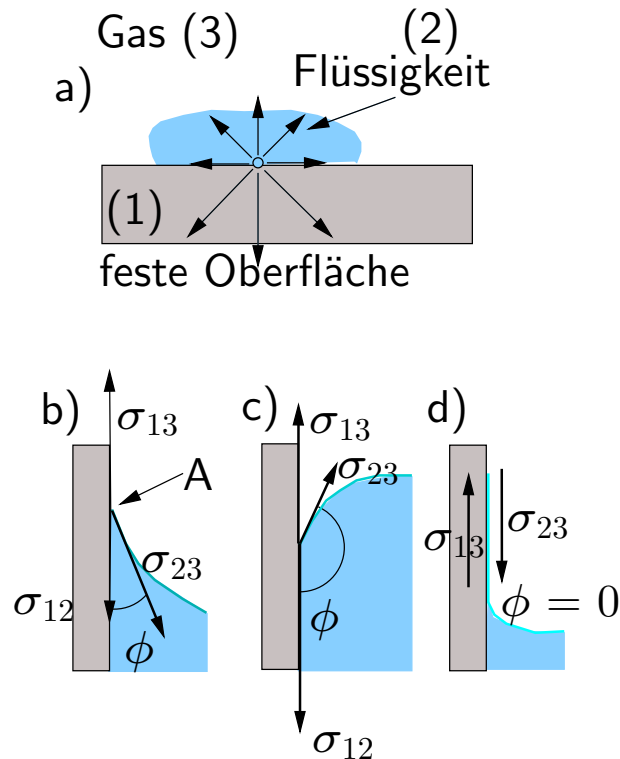


Innerhalb einer Flüssigkeit heben sich die Kräfte auf ein Molekül auf, am Rande oder auch an der Gefäßwand in der Regel nicht. Um ein Molekül aus der Flüssigkeit zum Rande zu verschieben, muss gegen diese Kraft Arbeit verrichtet werden. Deshalb muss zur Vergrößerung der Oberfläche um ΔA eine Arbeit ΔW aufgebracht werden; der Quotient $\varepsilon = \Delta W / \Delta A$ ist die sog. **spezifische Oberflächenenergie**. Diese kann mit der Anordnung links unten bestimmt werden. Zur Vergrößerung um $\Delta A = 2 \cdot L \cdot \Delta S$ (zwei Seiten) ist die folgende Arbeit erforderlich:

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = \varepsilon \Delta A = \varepsilon \cdot 2 \cdot L \cdot \Delta s, \quad \text{also} \quad \sigma \doteq \frac{F}{2L} = \varepsilon,$$

wo σ , die sog. **Oberflächenspannung**, gerade gleich ε ist.

Grenzflächen und Kapillarkräfte



Bei Grenzflächen von Flüssigkeiten mit Gasen und Festkörpern müssen die verschiedenen Oberflächenspannungen σ_{12} zwischen fest und flüssig, σ_{13} zwischen fest und gasförmig und σ_{23} zwischen flüssig und gasförmig berücksichtigt werden. Offensichtlich muss gelten, dass $\sigma_{23} > 0$ weil sonst die Flüssigkeit verdampft. Im Punkt A in der Abbildung b) links greift eine Kraft $\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$ an, wobei die einzelnen Teilkräfte \vec{F}_{ij} proportional zu den jeweiligen Oberflächenspannungen σ_{ij} sind. Es gilt für b) $\sigma_{13} > \sigma_{12}$ (Wasser-Glas), c) $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ (Quecksilber-Glas) und d) $\sigma_{13} - \sigma_{12} > \sigma_{23}$ (vollständige Benetzung durch einen Flüssigkeitsfilm). Die horizontale Kraftkomponente verformt die Wand unmerklich und wird durch die dabei erzeugte Reaktionskraft kompensiert.

Der Randwinkel ϕ stellt sich gerade so ein, dass sich alle Kräfte kompensieren (die Flüssigkeit ruht). Wegen der besprochenen Kompensation der horizontalen Komponente, brauchen wir nur noch die vertikale Komponente zu betrachten:

$$\sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \phi - \sigma_{13} = 0.$$

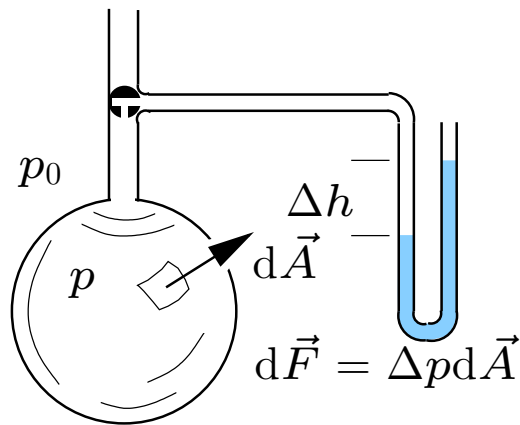
Damit erhalten wir

$$\cos \phi = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}},$$

was nur für $|\sigma_{13} - \sigma_{12}| < \sigma_{23}$ definiert ist. Für b) gilt $\sigma_{13} > \sigma_{12} \implies \cos \phi > 0 \implies \phi < 90^\circ$. Für c) gilt $\sigma_{13} < \sigma_{12} \implies \cos \phi < 0 \implies \phi > 90^\circ$. Für d) gilt $\sigma_{23} < \sigma_{13} - \sigma_{12}$ und der Winkel ist nicht definiert. Die Flüssigkeit erfährt eine Kraft nach oben bis zur vollständigen Benetzung der Oberfläche und σ_{13} ist ein sinnloser Begriff.

Wir haben bei diesen Überlegungen die Schwerkraft nicht berücksichtigt.

Druck im Inneren einer Seifenblase



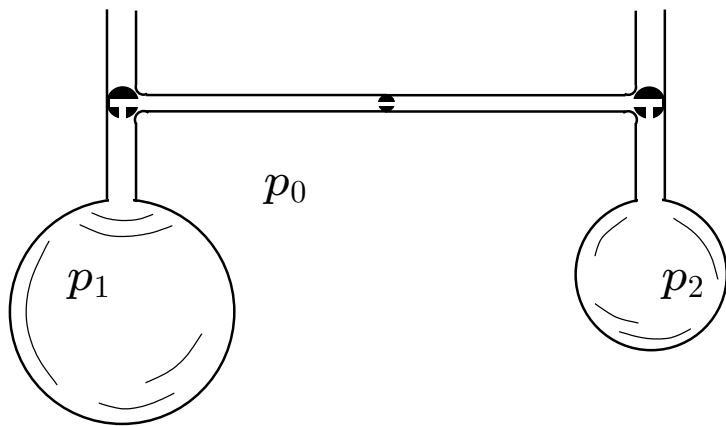
Wir können den Druck im Inneren einer kugelförmigen Seifenblase jetzt einfach bestimmen: Die Seifenblase versucht sich zusammenzuziehen (Oberflächenspannung), was einen kleinen Überdruck Δp im Innern erzeugt. Die Druckkraft nach außen wird gerade durch die Oberflächenspannung kompensiert. Ein stabiler Zustand ist nur dann erreicht, wenn der Energiegewinn $\varepsilon \cdot A$ durch eine Verkleinerung der Blase um Δr gerade

gleich dem Energieaufwand $F_p \Delta r = \Delta p 4\pi r^2 \Delta r$ ist.

$$\varepsilon \cdot 2 \cdot 4\pi [r^2 - (r - \Delta r)^2] = \Delta p \cdot 4\pi r^2 \Delta r.$$

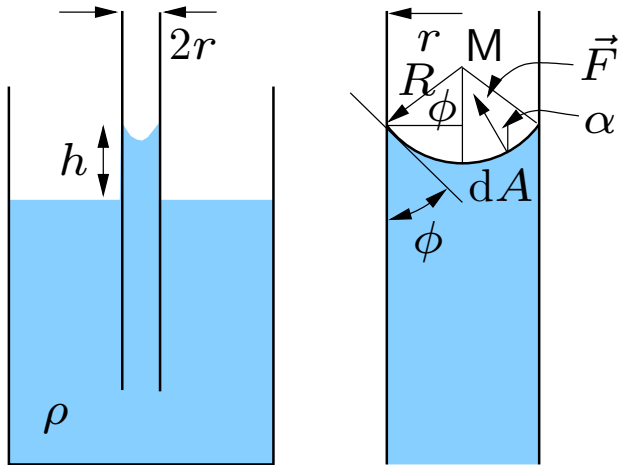
Vernachlässigen wir Terme mit Δr^2 , so erhalten wir:

$$\Delta p = \frac{4\varepsilon}{r}.$$



Der Überdruck sinkt mit wachsendem Radius r . Dies führt auch dazu, dass im Versuch links der große Ballon wächst, während der kleine schrumpft. Ist also die Oberflächenenergie positiv, so versucht eine Flüssigkeit bei gegebenem Volumen eine minimale Oberfläche einzunehmen.

Kapillarität



Wenn wir ein Rohr in Wasser eintauchen, so steigt der Wasserstand im Rohr um h . Ist der Innenradius der Kapillare kleiner als der gekrümmte Bereich der Flüssigkeitsoberfläche, so nähern wir diesen als Kugeloberfläche mit Krümmungsradius $R = r / \cos \phi$. An der Flüssigkeitsoberfläche herrscht der Druck

$$p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{r} \cos \phi, \quad \text{wo } \sigma = \sigma_{23}.$$

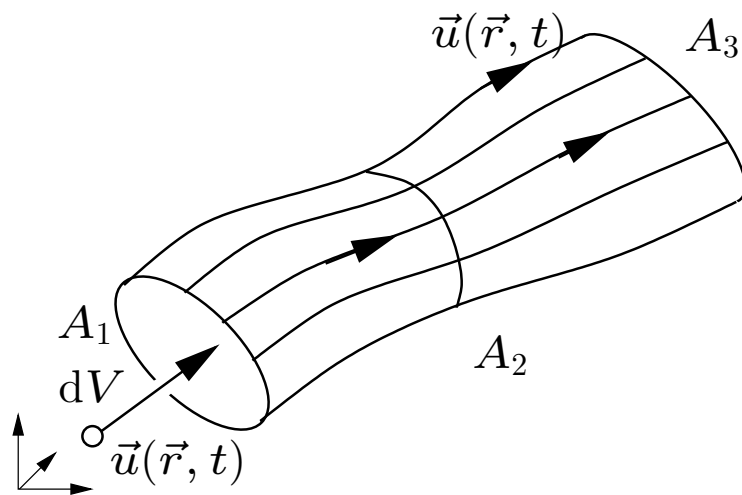
Die Druckkraft auf die Fläche ist $p\pi r^2$ und muss gleich sein wie die Gewichtskraft der darunterliegenden Flüssigkeitssäule, $F_G = mg = \rho\pi r^2 h g$. Daraus folgt für die Höhe h der Säule,

$$h = \frac{2\sigma \cos \phi}{r g \rho}.$$

Hydrodynamik

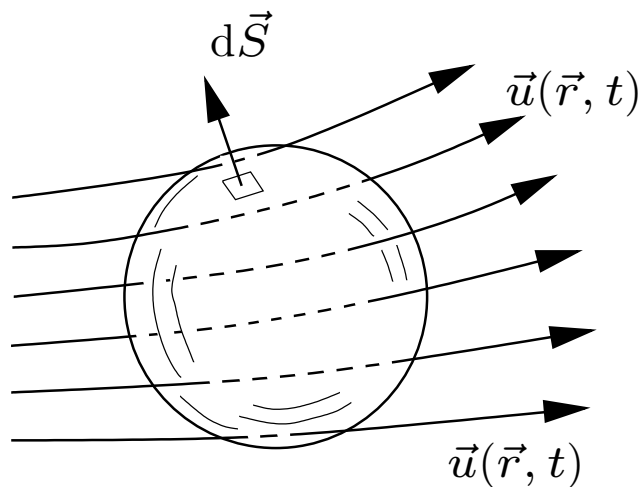
Die Beschreibung von bewegten Flüssigkeiten muss alle äußeren Kräfte, Reibungskräfte und auf Druckdifferenzen zurückzuführende Kräfte berücksichtigen, also

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_R = \Delta m \ddot{\vec{r}} = \rho dV \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}.$$



Flüssigkeiten, für die Reibung vernachlässigbar ist, verhalten sich wie **ideale** Flüssigkeiten, sind Reibungskräfte groß gegen die anderen Kräfte, so haben wir es mit einer **zähen (viskosen)** Flüssigkeit zu tun. Eine Strömung heißt **stationär**, wenn sich die Geschwindigkeit an einem Ort nicht ändert. Strömungen bei denen sich die einzelnen Stromfäden nicht vermischen heißen **laminare** Strömungen. Für eine **turbulente** Strömung ist aufsteigender Zigarettenrauch ein Beispiel.

Kontinuitätsgleichung



In jeder Stromlinie bleibt die geführte Masse konstant, denn

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot u_2.$$

Die Größe $\vec{j} \doteq \rho \cdot \vec{u}$ heißt **Massenstromdichte** bzw. **Massenflussdichte**, es gilt $I = \vec{j} \cdot \vec{S} = \text{const.}$ Wir betrachten nun eine geschlossene Oberfläche S mit Oberflächenelement $d\vec{S}$ und zählen die Stromlinien, die in die Fläche S eindringen und wieder aus ihr heraustreten. Die zeitliche Änderung der in S eingeschlossenen Masse M , $-\partial M/\partial t$, ist gleich der Masse, die pro

Zeiteinheit durch S strömt, wobei hinein positiv und hinaus negativ zählt.

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho = - \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_S d\vec{S} \cdot \rho \cdot \vec{u}$$

Nach dem Satz von Gauß lässt sich das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umwandeln:

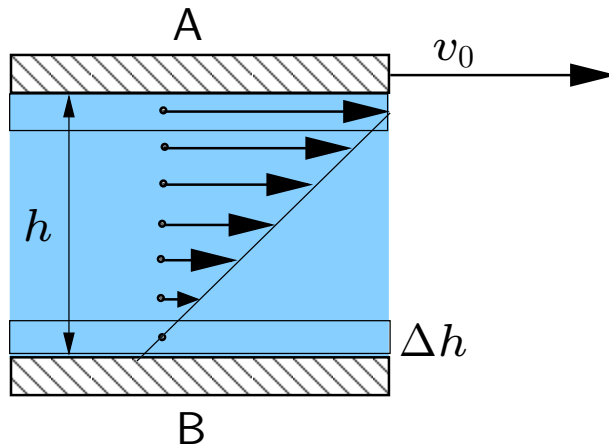
$$- \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_S d\vec{S} \cdot \rho \cdot \vec{u} = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}).$$

Die beiden Ausdrücke ganz links und ganz rechts müssen übereinstimmen, ja sogar die Integranden, also:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Dies ist die sog. **Kontinuitätsgleichung**.

Innere Reibung



Wir können mit einem Löffel den Tee umrühren, weil reale Flüssigkeiten Reibung aufweisen. Die Platte A links bewege sich mit v_0 nach rechts. Die unmittelbar daran anschließende Flüssigkeitsschicht bewegt sich wegen der Reibung auch mit v_0 nach rechts. Platte B soll still stehen, die unmittelbar darüberliegende Flüssigkeitsschicht bleibt auch stehen. Die oberste Schicht übt auf die darunterliegende eine Tangentialkraft aus, die letztere in Bewegung versetzt. Diese wiederum übt auf die darunterliegende Schicht eine Tangentialkraft aus, die letztere . . . Aus der Erfahrung wissen wir, dass

$$F \propto A, \quad F \propto \Delta v, \quad F \propto \frac{1}{\Delta h}, \quad \text{also } F = \eta A \frac{dv}{dh}.$$

Dynamische Viskosität, kinematische Viskosität

Die Proportionalitätskonstante η , ist eine materialabhängige Größe, die sog. **dynamische Viskosität** oder Zähigkeit.

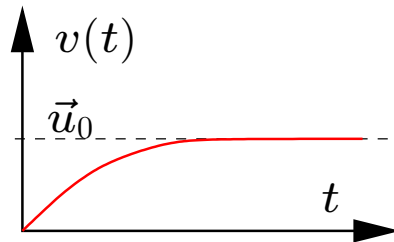
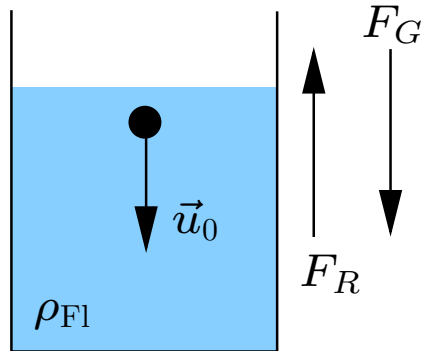
$$[\eta] = \frac{N \cdot s}{m^2} = \text{Pa s}.$$

Oft wird statt der SI-Einheit Pa s die veraltete cgs-Einheit Poise (P) verwendet, 1 P ist gleich einer Dezimalpascalsekunde, 1 dPa s.

Oft wird auch die **kinematische Viskosität** $\nu = \eta/\rho$ verwendet. Der Kehrwert von η , $1/\eta$ heißt **Fluidität**. Die Viskosität von Wasser für verschiedene Temperaturen ist in der Tabelle unten angegeben.

Temperatur [C]	0	10	20	30	50	70	100
Viskosität η [Pa s]	1,792	1,307	1,002	0,798	0,548	0,404	0,282

Das Stokessches Gesetz

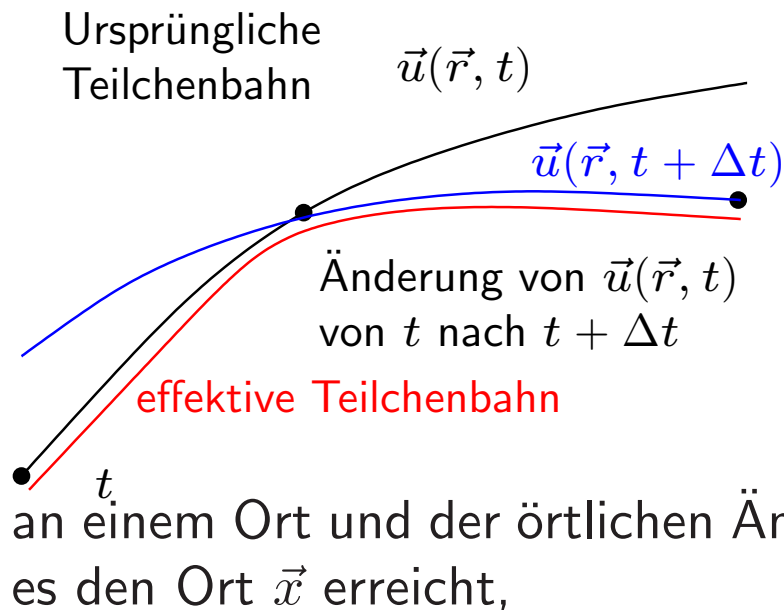


Aus der Erfahrung wissen wir, dass ein Löffel (oder für Physiker eine Kugel) mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit in den Honig sinkt. Die anfänglich langsame Geschwindigkeit ($v_0 = 0$) nähert sich bald einer konstanten Geschwindigkeit u_0 , bei der die Reibungskräfte gerade die um die Auftriebskraft verminderte Gravitation kompensieren. Stokes hat nun durch Versuche mit verschiedenen nicht zu großen Kugeln herausgefunden, dass

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta R_K \cdot \vec{u}_0,$$

wo R_K der Kugeldurchmesser ist. Die Bedeutung von “nicht zu groß” wird später mit dem Begriff der Reynoldszahl genauer gefasst.

Die substantielle Beschleunigung



In einer Strömung kann sich das Geschwindigkeitsfeld zeitlich ändern. Nur bei einer stationären Strömung geschieht dies nicht. Wollen wir die Bewegungsgleichung eines Flüssigkeitselementes herleiten, so muss dieser Umstand berücksichtigt werden. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist die Summe aus der zeitlichen Änderung des Geschwindigkeitsfeldes

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}.$$

Dieser Ausdruck heißt **substantielle Beschleunigung**.

Die Euler-Gleichungen

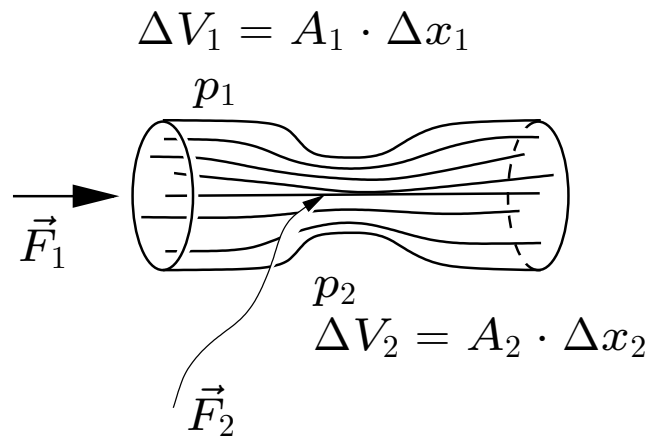
Die erste und einfachste Gleichung der Hydrodynamik erhalten wir, indem wir die Beschleunigung eines Teilchens mit der Summe der auf es angreifenden Kräfte pro Masse gleichsetzen. Für den Fall, dass nur Druckgradient und Gravitation angreifen, gilt

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p.$$

Diese Gleichung wurde durch L. Euler bereits 1755 aufgestellt und bildet immer noch die Grundlage der Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.

Die Bernoulli-Gleichung

Eine weitere einfache Gleichung der Hydrodynamik folgt aus der Kontinuitätsgleichung oder der Energieerhaltung. Um das Flüssigkeitsvolumen $\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1$ muss man, um den Druck p_1 zu überwinden, die Arbeit



$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \Delta V_1$$

verrichten. In der Rohrverengung gilt $\Delta V_2 = A_2 \cdot \Delta x_2$ und die für die Verschiebung notwendige Arbeit ist

$$\Delta W_2 = F_2 \Delta x_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \Delta V_2,$$

womit auch die potentielle Energie der Flüssigkeiten geändert wird. In einer idealen (reibungsfreien) Flüssigkeit bleibt die Summe aus potentieller und kinetischer

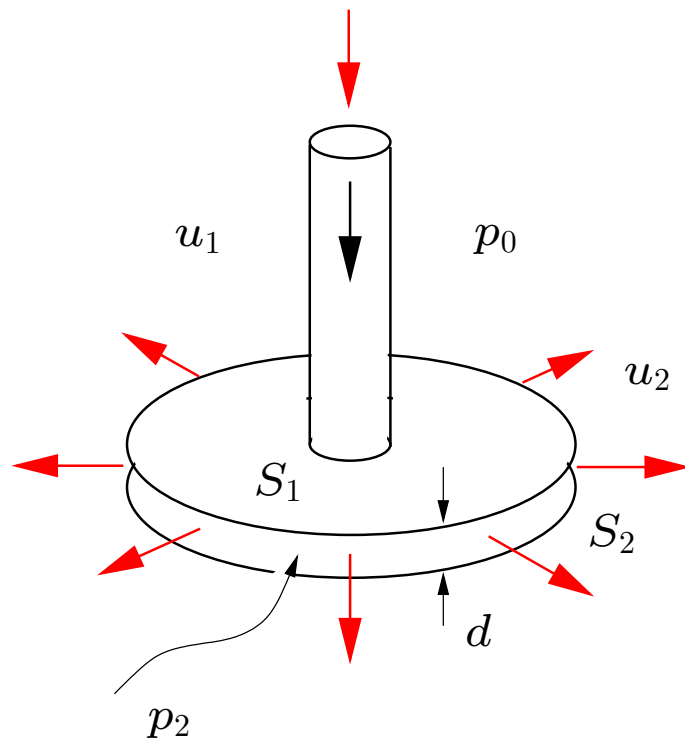
Energie erhalten

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \Delta V_2.$$

Für inkompressible Flüssigkeiten ist $\rho = \text{const.}$ und deshalb $\Delta V_1 = \Delta V_2$, womit wir die **Bernoulli-Gleichung** hergeleitet haben:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 = \text{const.}$$

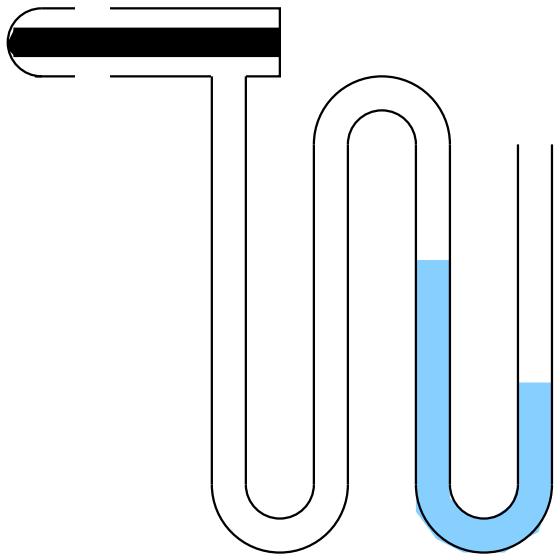
Hydrodynamisches Paradoxon



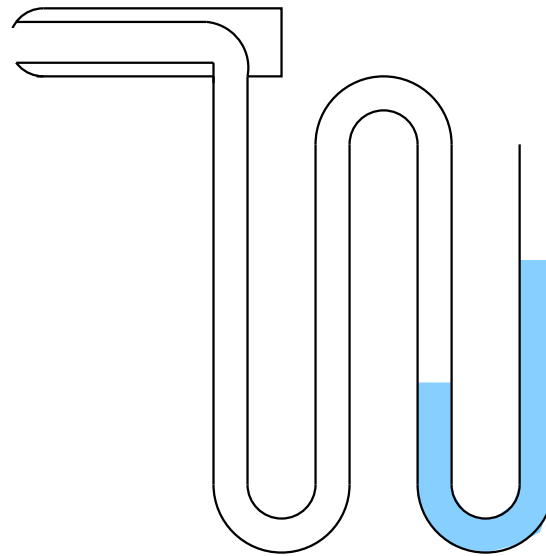
Ein besonders verblüffendes Beispiel für die Bernoulli-Gleichung liefert das links abgebildete **hydrodynamische Paradoxon**. Die durch das Rohr geblasene Luft zieht in dieser Anordnung die unter der Scheibe S_1 liegende Scheibe S_2 an. Die Strömungsgeschwindigkeit u_2 wird dabei so groß, dass der Unterdruck $p_0 - p_2$ zu einer Kraft $(1/2)\rho_L u_2^2 \cdot A$ führt, die die Gewichtskraft $m \cdot g$ aufheben kann.

Andere Beispiele sind Zerstäuber, Drucksensoren oder sogar Tragflächenprofile (siehe morgen).

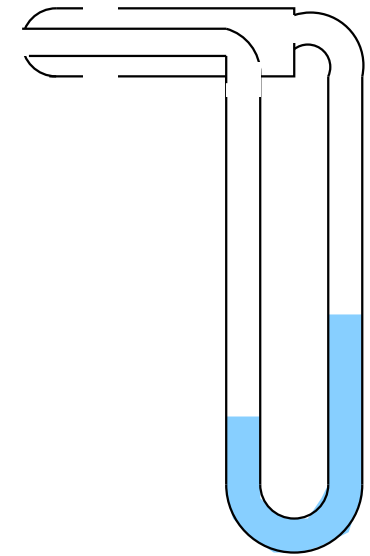
Drucksensoren



Drucksonde zur Messung des statischen Druckes.

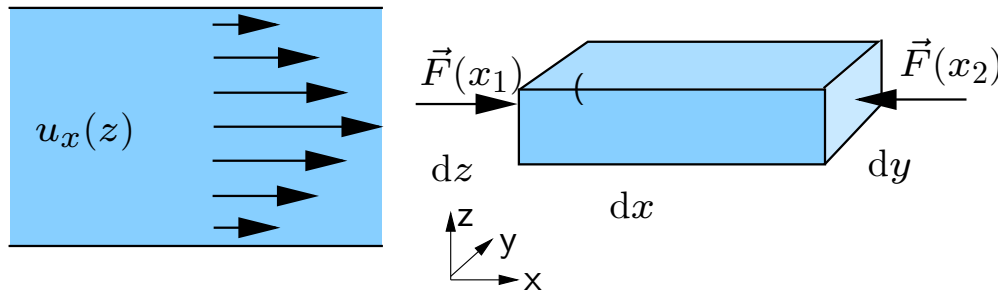


Pitot-Rohr zur Messung des Gesamtdruckes



Prandtl'sches Staurohr zur Messung des Staudruckes

Laminare Strömungen



Man kann die bereits gefundene Reibungskraft auch ausdrücken als²

$$d\vec{F}_R = \eta \Delta \vec{u} dV.$$

In einer laminaren Strömung in x -Richtung zwischen zwei Platten stellt sich im stationären Zustand ein Geschwindigkeitsprofil ein, welches durch die innere Reibung, Plattenabstand und Druckgradienten in x -Richtung gegeben ist. Auf ein Flüssigkeitselement wirkt die Kraft $d\vec{F}(x_1) = p(x_1)dzdy$ an der einen Stirnfläche, $d\vec{F}(x_2) = p(x_2)dzdy$ an der anderen. Die Differenz $d\vec{F}_x = -(dp/dx)dx dz dy$ muss gerade die Reibungskraft $(dF)_x = \eta dV \Delta u_x = \eta dx dy dz \partial^2 u_x / \partial z^2$ kompensieren, also

²Eine Herleitung ist z. B. in Demtröder gegeben.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \implies \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{\eta} \frac{dp}{dx} + C_0 \implies u(z) = -\frac{z^2}{2\eta} \frac{dp}{dx} + C_0 z + C_1.$$

Die Integrationskonstante folgen wie immer aus den Randbedingungen. Die Platten sollen bei $z = \pm d$ sein, wo $u(\pm d) = 0$ sein muss. Aus Symmetriegründen muss so der lineare Term wegfallen, $C_0 = 0$ und C_1 bestimmt sich leicht aus

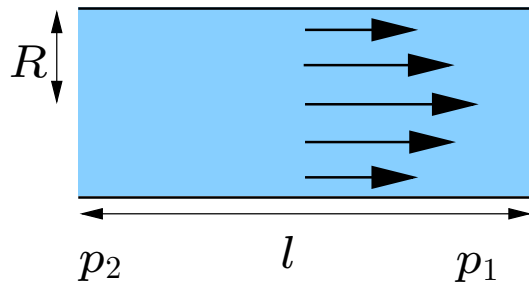
$$0 = \frac{z^2}{2\eta} \frac{dp}{dx} + C_1 \implies C_1 = -\frac{d^2}{2\eta} \frac{dp}{dx}.$$

Damit erhalten wir für das Geschwindigkeitsfeld zwischen zwei parallelen Platten

$$u(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (z^2 - d^2).$$

Ist die Strömungsgeschwindigkeit direkt an den Platten $u_d = u(\pm d) \neq 0$, so addiert sich diese Geschwindigkeit zu $u(z)$, wie man leicht zeigen kann.

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille



Der deutsche Ingenieur Hagen und der französische Arzt Poiseuille haben 1839 und 1840 die Strömung in dünnen Rohren untersucht. Wie schon vorhin für eine Strömung zwischen zwei parallelen Platten ist hier die "nicht-Idealität" der Flüssigkeit, die Reibung, sehr wichtig. Die Strömung kommt nur durch eine Druckdifferenz zustande, welche eine ideale Flüssigkeit beschleunigen würde. Die reale Flüssigkeit entgegnet der angreifenden Druckkraft im stationären Fall mit einer gleich großen aber entgegengerichteten Reibungskraft. Die Versuche von Hagen und Poiseuille haben ergeben, dass die Stromstärke $I = V/t$

$$I = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} \quad \text{und} \quad u(r) = \frac{p_2 - p_1}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Die Navier-Stokes-Gleichung

Stokes und Navier haben versucht, Flüssigkeitsströmungen “ab initio” aus den Newtonschen Gleichungen zu verstehen und haben unabhängig von einander die sog. **Navier-Stokes** Gleichung gefunden,

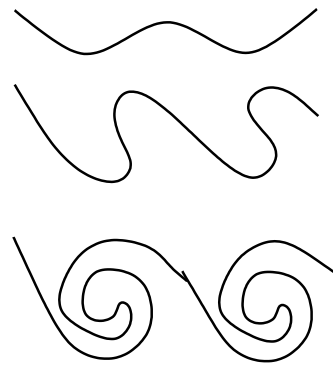
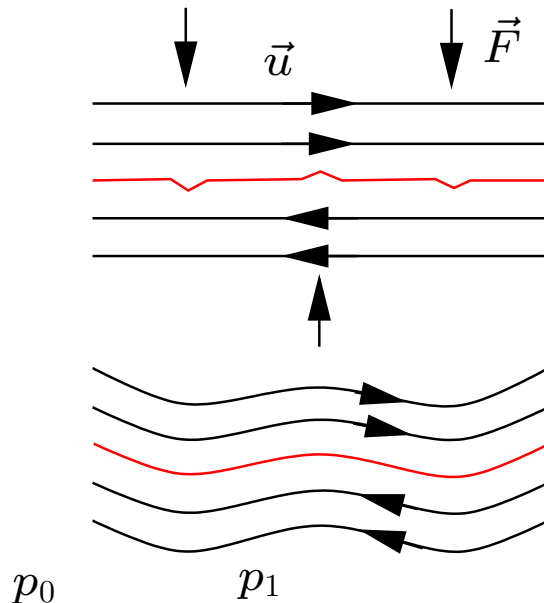
$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \Delta \vec{u}.$$

Für ideale Flüssigkeiten, $\eta = 0$, geht sie über in die Euler-Gleichung. Der räumliche Term $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ kann mit Hilfe der Vektoridentität

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 - (\vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u})$$

in eine Änderung des Betrags von \vec{u} und eine Richtungsänderung von \vec{u} aufgespalten werden. Letztere führt zur Ausbildung von Wirbeln.

Wirbel und die Zirkulation



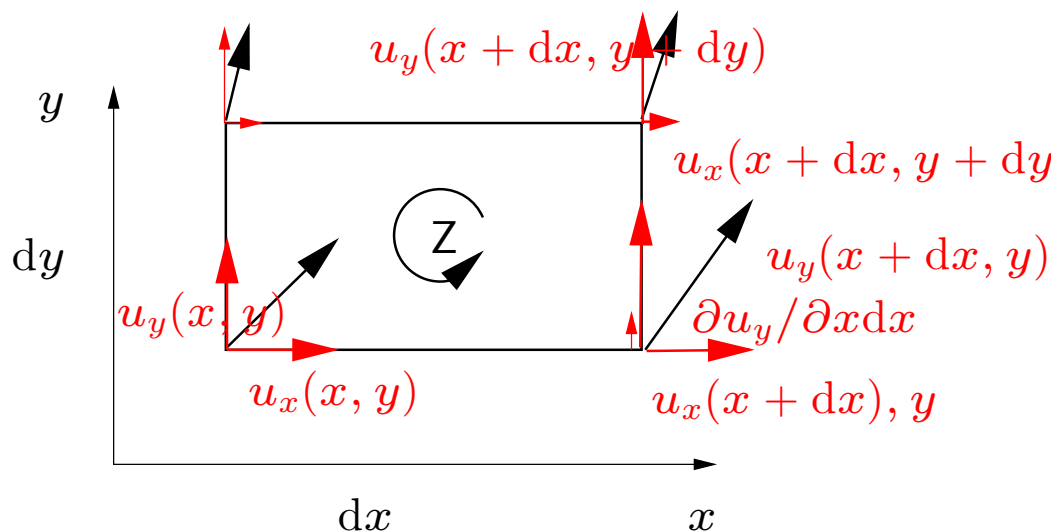
Paradoxerweise scheinen also nach Navier-Stokes Wirbel nur in reibungsbehafteten Flüssigkeiten zu entstehen, während wir soeben gelernt haben, dass solche Flüssigkeiten laminar fließen. Tatsächlich entstehen Wirbel in reibungsarmen Flüssigkeiten an Stellen, wo die Reibung besonders stark wird, an Grenzflächen, in Ecken oder an Hindernissen, kurz, an Stellen, wo

große Geschwindigkeitsgradienten auftreten. Links ist eine solche Situation abgebildet³. Kelvin und Helmholtz haben bemerkt, dass bereits eine kleine Störung reicht, um eine laminare Strömung turbulent werden zu lassen. Die Geschwin-

³Dies ist die sog. **Kelvin-Helmholtz-Instabilität**.

digkeitserhöhung an den zusammengedrückten Stellen führt dort nach Bernoulli zu einer Druckerniedrigung, was die Stromlinien noch näher zusammenzieht. Dadurch werden sie noch schneller, was den Druck weiter erniedrigt, etc. Die einmal ausgebeulte rote Stromfläche wird immer mehr ausgebeult, eine instabile Situation. Die weitere Entwicklung ist in der rechten Hälfte der Abbildung gezeigt, die Ausbeulungen werden immer stärker, bis sich diese in Wirbel ausbilden und die Fläche vollständig verwirbelt wird.

Beschreibung von Wirbelfeldern



Wirbel lassen sich durch die sog. **Zirkulation** $Z = \oint d\vec{S} \cdot \vec{u}$ beschreiben.

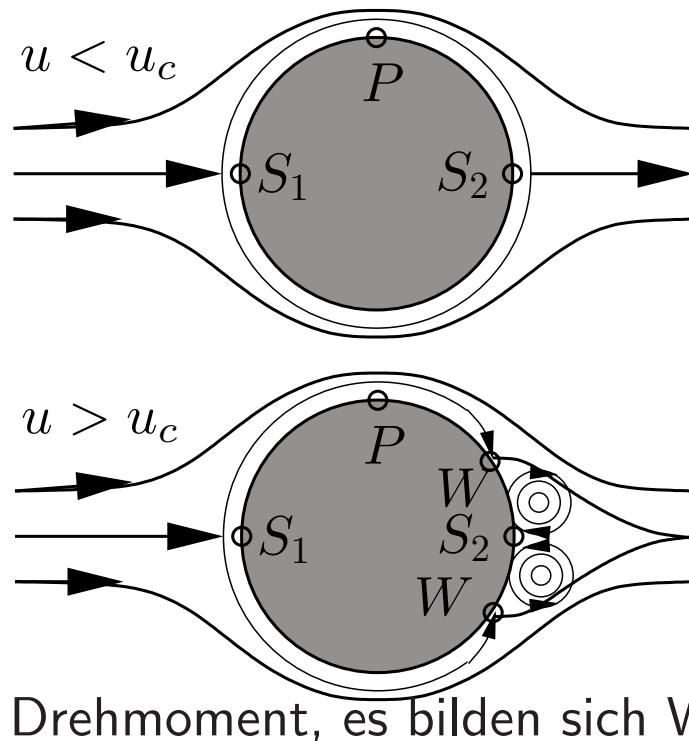
$$dZ = u_x dx + \left(u_x + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) dx - u_y dy$$

$$= \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy,$$

was gerade die z -Komponente der Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ ist. Also

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{u} = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u}.$$

Turbulenz

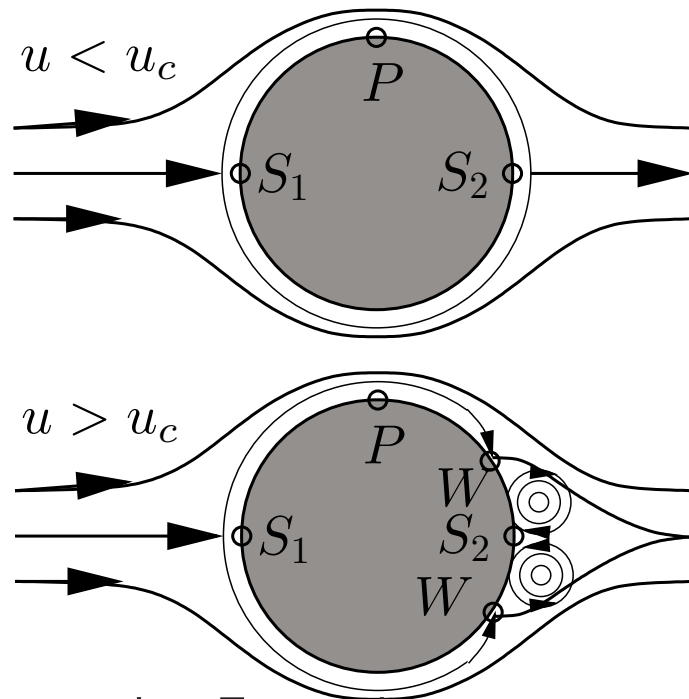


Strömt eine Flüssigkeit genügend langsam⁴ um einen Zylinder, so kommt die Strömung in den Staupunkten S_1 und S_2 zum stehen. Die Flüssigkeit strömt um den Körper und erreicht im Punkt die höchste Geschwindigkeit und damit nach Bernoulli den niedrigsten Druck p_P . In den Punkten S_1 und S_2 herrscht p_0 . Übersteigt die Geschwindigkeit u einen kritischen Wert u_c , so kommt die Strömung aufgrund der Reibung bereits an den Stellen W zum Stehen. Auf die Flüssigkeit wirkt wegen der Strömung ein

Drehmoment, es bilden sich Wirbel.

⁴Siehe Reynoldszahl.

Widerstand



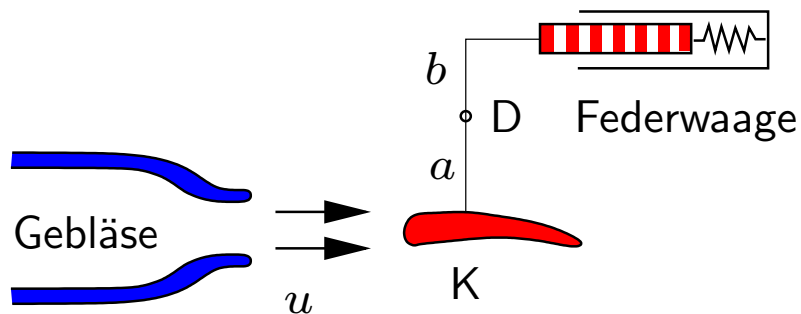
von der Form des umströmten Körpers ab. Die Druckwiderstandskraft addiert sich zu der nach Hagen-Poiseuille durch Reibungsverluste erwarteten Druckkraft

Die aufgrund der Wirbel nicht verschwindende Geschwindigkeit im hinteren Staupunkt bewirkt nach Bernoulli im Vergleich zur wirbelfreien Strömung einen kleineren Druck in S_2 , als in S_1 . Der Druckunterschied führt zu einer Kraft, die an dem Zylinder angreift und mit der Strömung mitzieht. Nach Bernoulli ist die Druckdifferenz $\Delta p = p_0 - p_1$ proportional zu $(\rho/2)u^2$ und die Kraft damit $F_D = c_D(\rho/2)u^2 A$. Die dimensionslose Proportionalitätskonstante c_D ist der **Druckwiderstandsbeiwert** und hängt

$F_R = (p_2 - p_0) + (\rho/2)u_2^2 A$ und wir erhalten für die gesamete Widerstandskraft

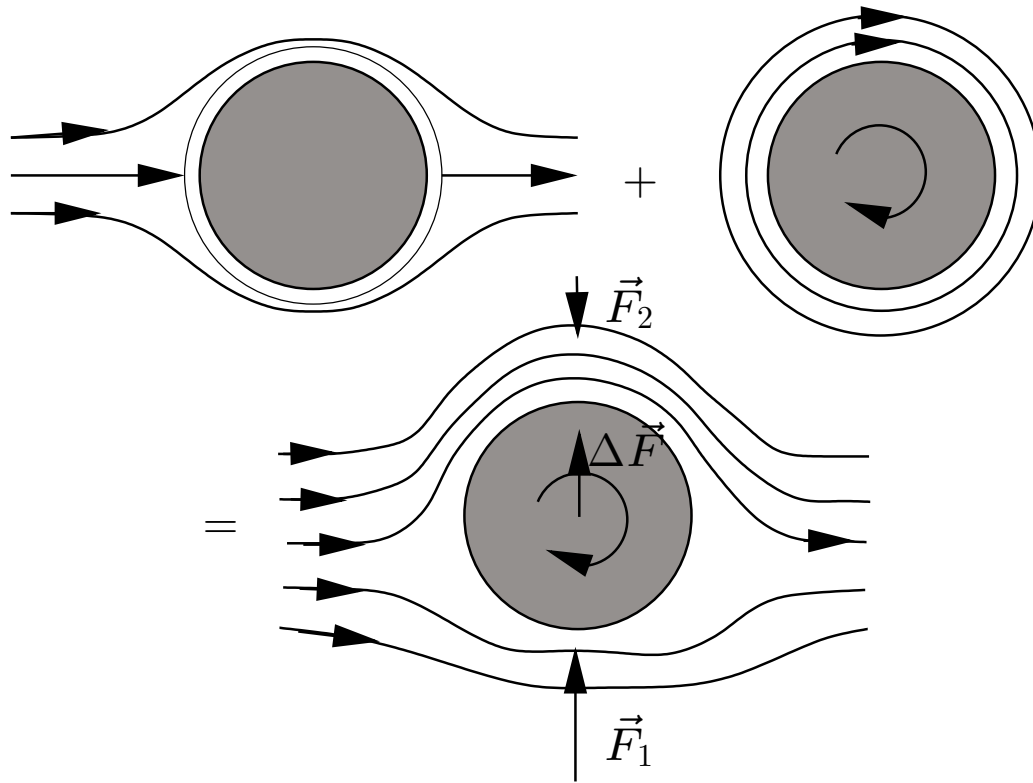
$$F_W = F_R + F_D = c_W \frac{1}{2} \rho u^2 A,$$

wo der Proportionalitätsfaktor $c_W > c_D$ **Widerstandsbeiwert** heißt.



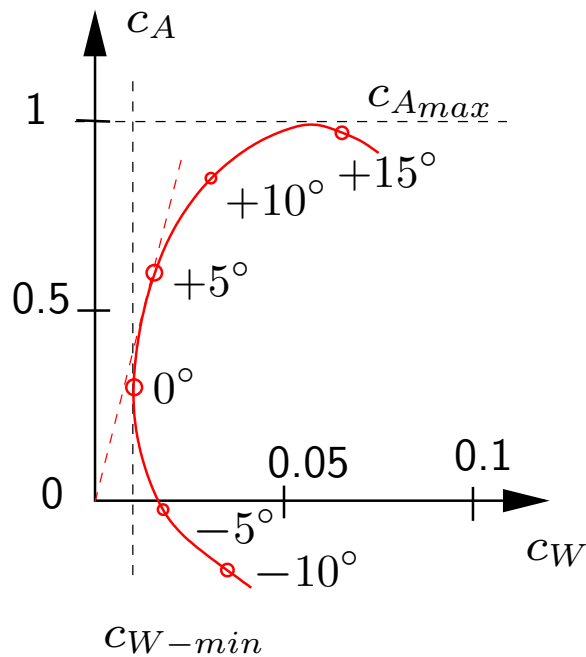
Dieser Widerstandsbeiwert kann z. B. mit der Anordnung links gemessen werden. Die Kraft auf die Federwaage ist wegen der Hebel um D proportional zu F_W . Typische c_W -Werte sind 0,06 für ein Tragflächenprofil, 1,2 für eine frontal angeströmte Scheibe und $\sim 0,2$ für moderne Autos. Noch vor 20 Jahren waren bei Autos c_W -Werte von 0,4 typisch.

Aerodynamischer Auftrieb I



Der dynamische Auftrieb wird am einfachsten mit dem Magnus-Effekt eingeführt. Ein drehender Zylinder erzeugt aufgrund der Reibung um sich herum einen Wirbel, der sich der von links kommenden Strömung überlagert. Nach Bernoulli entsteht ein Überdruck unten und ein Unterdruck oben am Zylinder, wodurch dieser einen Auftrieb erfährt. Dieser Effekt soll neuerdings wieder für die Schifffahrt ausgenutzt werden.

Aerodynamischer Auftrieb II



Der dynamische Auftrieb kann also auch wieder als Druckdifferenz zwischen oben und unten aufgefasst werden. Nach Bernoulli,

$$F_A = \Delta p \cdot A = c_A \cdot \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) A.$$

Bei einem Tragflächenprofil kommt neben der Zirkulation um den Flügel, die wegen Drehimpulserhaltung und dem Anfahrwirbel entsteht, der Impulsübertrag durch den Anstellwinkel beim dynamischen Auftrieb dazu. Ein optimal eingestellter Anstellwinkel liefert bei minimalem c_W -Wert einen möglichst hohen c_A -Wert.

Die Reynolds-Zahl

Für Untersuchungen des Verhaltens von Körpern in Strömungen ist es oft nicht praktikabel den Körper selber zu untersuchen. Wer hat schon einen Windkanal für den Airbus A-380 oder einen Wasserkanal für einen Lindenau-Frachter! Reynolds hat dieses Problem 1883 untersucht und erkannt, dass man die Reibungskräfte an einer Kugel oder in einem Rohr umschreiben kann als

$$W = f \cdot \frac{\rho}{2} v^2 A, \quad \text{wo } f_{\text{St}} = \frac{8}{\left(\frac{r\rho v}{\eta}\right)} \text{ für Stokes und } f_{\text{H-P}} = \frac{12}{\left(\frac{r\rho v}{\eta}\right)} \text{ für Hagen-Poiseuille.}$$

In beiden und vielen anderen Problemen kommt die Kombination

$$\text{Re} \doteq \frac{r\rho v}{\eta}$$

vor. Diese dimensionslose Zahl heißt **Reynoldszahl** und erlaubt es, Untersuchungen an Modellen vorzunehmen.

Die Reynoldszahl II

Mit der Reynoldszahl kann man Reibungswiderstände allgemein in der Form

$$F_R = \Psi(\text{Re}) \frac{\rho}{2} v^2 A$$

schreiben. Weil bei allen Strömungen der Teil hinter $\Psi(\text{Re})$ gleich bleibt, wird die Besonderheit jeder Strömung durch die $\Psi(\text{Re})$ ausgedrückt. D. h. aber, dass ich Strömungen mit derselbe Reynoldszahl direkt vergleichen darf! Wir können also ein Modell eines Flugzeuges in einem Windkanal testen, solange die Reynoldszahl gleich bleibt. Dies kann durch Wahl der Dimension des Flugzeugs (r in Re) und der Geschwindigkeit (v) erreicht werden.

Durch Erweiterung von Re mit $r^2 v$ sehen wir unmittelbar, dass

$$\text{Re} = \frac{r^3 \rho v^2}{\eta r^2 v} = \frac{2E_{\text{kin}}}{W_{\text{Reibung}}}.$$

Der Zähler gibt $2 \cdot E_{\text{kin}}$ eines Volumens r^3 an, welches sich mit v bewegt, der Nenner gibt die Reibungsenergie an, die verbraucht wird wenn der Körper mit Querschnitt r^2 und v bewegt wird. Ist das Verhältnis klein (große Reibung) ist die Strömung laminar, ist es größer als Re_c ist sie turbulent.

Die kritische Reynoldszahl, Re_c findet man experimentell z. B. für ein zylindrisches Rohr mit Radius r

$$Re_c = \frac{r\rho v}{\eta} = 2300.$$

Will man beim Hausbau sicherstellen, dass in allen Rohren eine laminare Strömung herrscht, so muss sichergestellt sein, dass auch an den engsten Stellen die Geschwindigkeit v klein genug ist, dass $Re < Re_c$.