

Versuch A05: Bestimmung des Planck'schen Wirkungsquantums

31. März 2023

I. Lernziele

- Entstehung des Röntgen-Bremskontinuums und der charakteristischen Röntgenstrahlung
- Zusammenhang zwischen Energie, Frequenz und Wellenlänge
- Beugung von Röntgenstrahlen am Kristallgitter
- Aufbau und Funktionsweise von Röntgenröhre und Zählrohr

II. Physikalische Grundlagen

II.1. Röntgenstrahlung

Röntgenstrahlung ist unsichtbare elektromagnetische Strahlung hoher Energie, und wurde erstmals 1895 durch *Wilhelm Conrad Röntgen* beobachtet [1, 2]. Nur wenige Jahre später, 1901, erhielt Röntgen für ihre Entdeckung den ersten Nobelpreis in Physik. Röntgen war auch der erste, der den Nutzen der nach ihm benannten Strahlen für die medizinische Diagnostik erkannte.

Als elektromagnetische Strahlung besitzt Röntgenstrahlung die gleichen Eigenschaften wie sichtbares Licht. Wie bei sichtbarem Licht ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Röntgenstrahlung mit ihrer Frequenz f und Wellenlänge λ verknüpft über

$$c = \lambda \cdot f . \quad (1)$$

Ebenso ist die Energie E von Röntgenstrahlen proportional zu ihrer Frequenz f :

$$E = h \cdot f \quad (2)$$

Die Proportionalitätskonstante h ist das sogenannte *Planck'sche Wirkungsquantum*, ihr Wert ist

$$h = 6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js} . \quad (3)$$

Röntgenstrahlung kann erzeugt werden durch Beschleunigung von elektrischen Ladungsträgern oder durch Aussendung von Strahlung bei elektronischen Übergängen in Atomen. Das erstgenannte Phänomen ist die sogenannte *Bremsstrahlung*, und tritt z. B. bei der Beschleunigung von Elektronen mit einer Potentialdifferenz von einigen kV auf. Diese

werden in der Natur bei Beschleunigung von Ladungsträgern im interplanetaren oder interstellaren Raum erreicht, oder künstlich mit Hilfe der Erzeugung von Hochspannungen. Letzteres macht man sich bei der Röntgenröhre zu Nutze.

II.2. Die Röntgenröhre

In der Röntgenröhre werden freie Elektronen mit der Ladung e durch den glühelektrischen Effekt an einem stromdurchflossenen Draht erzeugt. Durch eine von außen angelegte Spannung U_B werden sie in Richtung der Anode beschleunigt. Die Elektronen erhalten dabei eine kinetische Energie E_{kin} , die dem Produkt aus Beschleunigungsspannung U_B und Elementarladung e entspricht:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = e \cdot U_B \quad (4)$$

Am Ende der Flugstrecke treffen die Elektronen mit dieser kinetischen Energie auf die Anode. Im Anodenmaterial werden sie auf einer sehr kurzen Strecke abgebremst (negativ beschleunigt!). Die kinetische Energie der Elektronen wird dabei zum einen als Wärmeenergie Q in der Anode umgesetzt, und zum anderen als *Bremsstrahlung* in Form von Röntgenquanten, mit einer Energie von $h \cdot f$, emittiert.

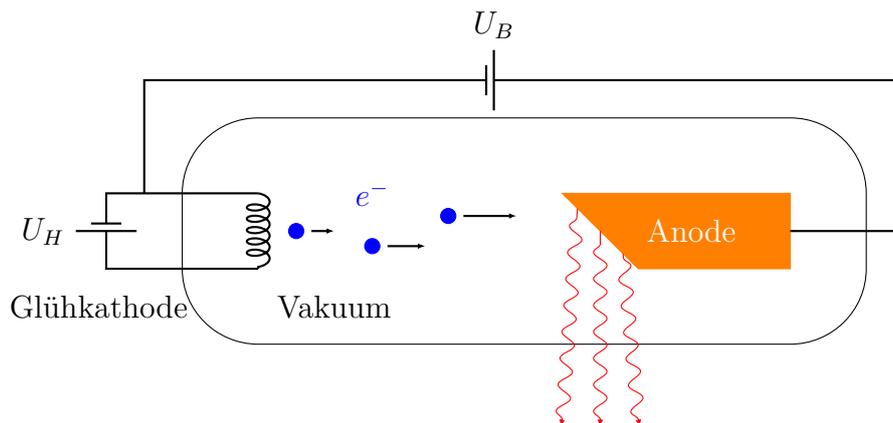


Abbildung 1: Die durch die Heizspannung U_H von der Glühkathode emittierten Elektronen e^- werden durch die Beschleunigungsspannung U_B zur Anode hin beschleunigt. Beim Auftreffen auf die Anode entsteht die Bremsstrahlung sowie die für das Anodenmaterial spezifische Charakteristische Strahlung.

Damit lautet die Energiebilanz für jedes einzelne Elektron

$$E_{\text{kin}} = e \cdot U_B = h \cdot f + Q \quad (5)$$

Die kinetische Energie der Elektronen verteilt sich statistisch auf die Bremsstrahlung und Erzeugung von Wärme. Es ergibt sich eine kontinuierliche spektrale Intensitätsverteilung für die Bremsstrahlung, das sogenannte *Bremskontinuum*, das in Abb. 2 (gestrichelte Linien) dargestellt ist.

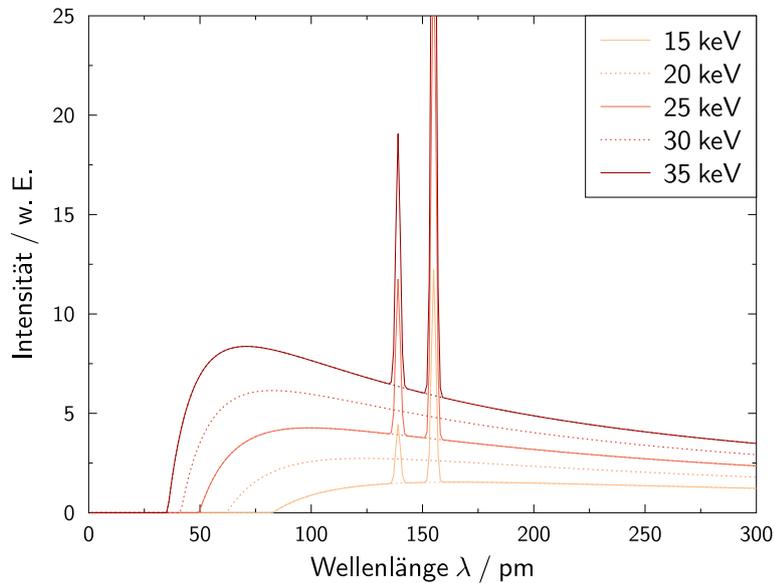


Abbildung 2: Bremskontinuum (gestrichelt) mit überlagerter charakteristischer Strahlung (durchgezogene Linien) für verschiedene Beschleunigungsspannungen.

Außerdem entsteht bei Auftreffen der Elektronen auf die Anode die sogenannte *charakteristische Strahlung*, die ebenfalls im Wellenlängenbereich der Röntgenstrahlung liegt. Diese tritt aufgrund der Anregung oder Ionisation von Elektronen der inneren Schalen der Atome des Anodenmaterials auf. Die dabei entstehenden Vakanzen werden durch Elektronen der äußeren Schalen aufgefüllt, die freigewordene Energie wird als Photon abgestrahlt. Da die Energieniveaus charakteristisch für das jeweilige Anodenmaterial sind, ergeben sich damit im Intensitätsspektrum der Röntgenstrahlung für das Material charakteristische Spektrallinien, wie in Abb. 2 (durchgezogene Linien) gezeigt.

Wegen der Energieerhaltung hat das Röntgenquant die maximale Energie, wenn die gesamte kinetische Energie des Elektrons in Strahlungsenergie umgewandelt wird, d. h. die Wärmeverluste gleich null sind ($Q = 0$):

$$E_{\max} = h \cdot f_{\max} = e \cdot U_{B,E} \quad (6)$$

Dies bedeutet, dass das Spektrum durch eine obere Frequenz f_{\max} begrenzt ist, also keine Röntgenquanten mit einer Energie oberhalb dieser Grenzenergie erzeugt werden. Die zugehörige Spannung $U_{B,E}$ bezeichnet man als *Einsatzspannung*, die zugehörige Frequenz

f_{\max} als *Maximalfrequenz* des Röntgenspektrums. Entsprechend ergibt sich aus (1) eine minimale Wellenlänge λ_{\min} . Dieser Zusammenhang ist auch als *Duane-Hunt-Gesetz* bekannt.

Mit Hilfe von Gl. (6) ergibt sich für die Maximalfrequenz und die minimale Wellenlänge

$$f_{\max} = \frac{e \cdot U_{B,E}}{h} , \quad (7)$$

$$\lambda_{\min} = \frac{c \cdot h}{e \cdot U_{B,E}} . \quad (8)$$

II.3. Beugung am Festkörper

Zur Vermessung des Röntgenspektrums kann man Festkörperkristalle einsetzen. Dabei macht man sich die innere Struktur des Kristalls zu Nutze. Man stelle sich parallel zur Kristalloberfläche verlaufende *Netzebenen* vor, die von den Atomen des Kristalls aufgespannt werden. An diesen Netzebenen wird die einfallende Röntgenstrahlung reflektiert. Um eine messbare Intensität der reflektierten Strahlung zu erreichen, muss die ausfallende Strahlung allerdings konstruktiv interferieren. Konstruktive Interferenz der auslaufenden Wellen ist genau dann gegeben, wenn die *Bragg-Gleichung*[3],

$$n \cdot \lambda = 2d \cdot \sin \beta , \quad (9)$$

erfüllt wird. λ ist hierbei die Wellenlänge des einfallenden Lichtes, d der Abstand der Netzebenen des Kristalls, β der Einfallswinkel der Strahlung gegenüber den Netzebenen des Kristalls und n eine natürliche Zahl. Die Beugung von Röntgenstrahlung ist also nur mit einem Kristall möglich, dessen Netzebenenabstand in derselben Größenordnung wie die Wellenlänge der Röntgenstrahlung liegt. Abb. (3) verdeutlicht schematisch die der Gleichung zugrunde liegende Geometrie.

III. Messprinzip

Zur Bestimmung des Planck'schen Wirkungsquantums steht in diesem Versuch ein digitales Schulröntgengerät von Leybold zur Verfügung. Es kann Elektronen bis zu 35 kV beschleunigen, und ermöglicht damit die Erzeugung von Röntgenstrahlung mit einer Energie von bis zu 35 keV. Die Röntgenstrahlung wird auf einen LiF-Kristall kollimiert, und die Intensität der vom Kristall reflektierten Strahlung mit einem Geiger-Müller-Zählrohr[4] gemessen. Die Intensitäten werden dabei von dem Röntgengerät digital aufgenommen und gespeichert, und können nach der Messung abgerufen werden.

Es werden Messungen des Röntgenspektrums für verschiedene Spannungen durchgeführt, und dabei der Einfallswinkel der Strahlung gegenüber dem Kristall variiert. Gesucht ist derjenige Anstellwinkel des Kristalls, bei dem die gemessene Intensität wieder die Nullrate erreicht, dies ist der Einsatzzpunkt des Spektrums. Mit Hilfe der Gleichung (9) kann dann bei bekanntem Netzebenenabstand die zugehörige minimale Wellenlänge

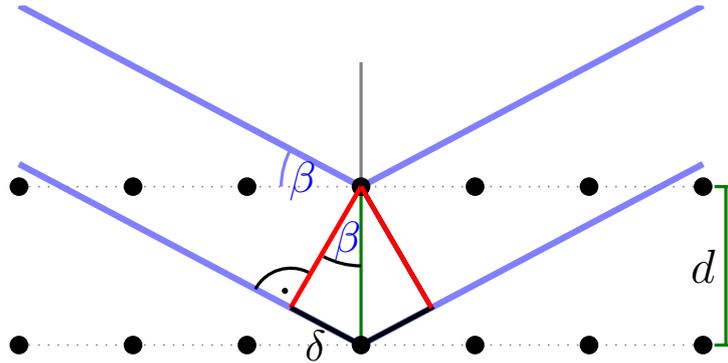


Abbildung 3: Schematische Darstellung der der Bragg-Gleichung zugrunde liegenden Geometrie. Das an der unteren Ebene reflektierte Licht legt einen um 2δ längeren Weg zurück, als das an der oberen Ebene reflektierte.

(für $n=1$) aus dem Einsatzpunkt bestimmt werden. Für den Netzebenenabstand des LiF-Kristalls gilt

$$d_{\text{LiF}} = 2,01 \cdot 10^{-10} \text{ m} . \quad (10)$$

Mit Hilfe von Gl. (1) kann aus der minimalen Wellenlänge die Maximalfrequenz bestimmt werden. Durch Auftragen der Werte der Maximalfrequenzen gegen die jeweiligen angelegten Beschleunigungsspannungen ergibt sich ein linearer Zusammenhang, der durch Gl. (7) beschrieben wird. Somit erhält man durch Bestimmung der Geradensteigung das Planck'sche Wirkungsquantum h .

IV. Aufgaben

1. Machen Sie sich mit der Bedienung der Röntgenröhre vertraut (Betreuer fragen!)
2. Messen Sie grob das Röntgenspektrum für 4 verschiedene Beschleunigungsspannungen U (20 kV bis 35 kV). Stellen Sie hierfür die Röntgenröhre auf folgende Werte:
 - $I = 1 \text{ mA}$
 - $\Delta t = 10 \text{ s}$
 - $\Delta\beta = 0,2^\circ$
 - Mode: Coupled
 - $\beta_{\downarrow} = 0^\circ, \beta_{\uparrow} = 15^\circ$

Übertragen Sie für jede Spannung die in der Röntgenröhre gespeicherten Werte in Ihr Protokoll!

3. Tragen Sie exemplarisch für eine der Spannungen die von Ihnen gemessenen Intensitäten gegen den Kristallwinkel auf, und bestätigen Sie, dass Sie ein Röntgenspektrum gemessen haben
4. Bestimmen sie aus Ihrer Messtabelle für jede Spannung die ansteigende Flanke des Bremskontinuums
5. Zeichnen Sie für alle Spannungen die ansteigenden Flanken in einer einzigen Grafik auf. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Grafik die Einsatzpunkte β_p der Spektren durch Extrapolation auf die Abzisse (β -Achse)
6. Berechnen Sie mit Hilfe von Gl. (9) die Ihren gemessenen Einsatzpunkten zugehörigen minimalen Wellenlängen. Berechnen Sie hieraus gemäß Gl. (1) die Maximalfrequenzen, und tragen Sie diese gegen die angelegten Beschleunigungsspannungen auf
7. Bestimmen Sie mit Hilfe von Gl. (7) und anhand der Grafik das Planck'sche Wirkungsquantum
8. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis durch einen Vergleich mit dem Literaturwert und eine Fehlerabschätzung

V. Fragen und Diskussionspunkte

- Wie entsteht das Bremskontinuum?
- Was ist die charakteristische Röntgenstrahlung, und wie entsteht sie?
- Warum benötigt man für diesen Versuch einen Kristall?
- Wie kommt die Braggsche Formel (Gl. (9)) zustande? (Grafische Herleitung)

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. “Experimentalphysik”. In: 5. Aufl. Bd. 3. Atome, Moleküle und Festkörper. Springer Spektrum, 2016, 233ff.
- [2] Christoph Kommer, Tim Tugendhat und Niklas Wahl. “Tutorium Physik fürs Nebenfach”. In: 2. Aufl. Springer Spektrum, 2019. Kap. Atom- und Molekülphysik, S. 670.
- [3] Christoph Kommer, Tim Tugendhat und Niklas Wahl. “Tutorium Physik fürs Nebenfach”. In: 2. Aufl. Springer Spektrum, 2019. Kap. Welleneigenschaften des Lichts, S. 571.
- [4] Alexander Piel. “Hans Geiger”. In: *Große Forscher und Forscherinnen von der Förde* (2008). URL: <https://www.uni-kiel.de/grosse-forscher/index.php?nid=geiger>.