Versuch A07: Zählstatistik und β-Spektrometer

31. März 2023

I. Theorie

I.1. Das Zerfallsgesetz

Instabile Atomkerne zerfallen spontan nach einem gewissen Zeitintervall dt, mit einer Wahrscheinlichkeit, die nur Isotopenabhängig ist. Es wurde bisher keine Abhängigkeit zwischen der Zerfallsrate und äußeren Bedingungen, wie Druck, Temperatur, Magnetfeld, usw. gefunden. Angenommen, dass zu dem Zeitpunkt $t = 0$ die Anzahl von unzerfallenen Kernen N_0 ist, kann man nach einer Zeit $t > 0$ die Anzahl der noch übrigen Kerne N durch das radioaktive Zerfallsgesetz angeben:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1}$$

λ ist die Zerfallskonstante, die für jeden Kern eine charakteristische Konstante ist. Nach der Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ ist die Hälfte der vorhandenen Kerne zerfallen.

I.2. Statistische Verteilungen

Das Zerfallsgesetz beschreibt das durchschnittliche Verhalten sehr vieler Kerne. Die Wahrscheinlichkeit p, dass ein bestimmter Kern innerhalb der Zeit Δt zerfällt, ist für alle Kerne gleich. Die Wahrscheinlichkeit W_B, dass innerhalb dieser Zeit von N Kernen genau x zerfallen, ist durch die Binomial-Verteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ gegeben:

$$W_B(x) = \frac{N!}{x!\,(N-x)!} \cdot p^x \,(1-p)^{N-x} \tag{2}$$

$$\mu = \sum_{x=0}^{N} x W_B(x) = Np, \qquad \sigma^2 = \sum_{x=0}^{N} (x-\mu)^2 \, W_B(x) = Np(1-p) \tag{3}$$

Für eine sehr große Kernanzahl N und eine relativ zu N kleine Kernspaltungsanzahl x (nach der Zeit Δt) kann man die Binomialverteilung zu einer Poissonverteilung annähern, wobei p sehr klein wird. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit W_P, dass genau x Kerne zerfallen, gleich

$$W_P(x) = \frac{(\mu)^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \qquad \text{wo} \;\; \mu = Np, \quad \sigma^2 = Np \tag{4}$$

Die Poissonverteilung ist um den Mittelwert μ asymmetrisch. Je größer μ, desto symmetrischer wird die Verteilung (wenn $\mu << N$). In diesem Fall kann man die Poissonverteilung auch als eine Gaußverteilung betrachten, wobei die Wahrscheinlichkeit W_G, dass genau x Kerne zerfallen gleich

$$W_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{mit} \quad \mu = Np, \quad \sigma^2 = Np \tag{5}$$

ist. Damit sind 68,3% der Zählergebnisse in dem Intervall $\mu \pm \sigma$, 95,4% in dem Intervall $\mu \pm 2\sigma$, und 99,7% in dem Intervall $\mu \pm 3\sigma$ zu finden.

I.3. Der β-Zerfall

Bei diesem Versuch zum *β-Zerfall* wird im Gegensatz zu den übrigen Versuchen dieses Praktikums, bei denen Prozesse in der Elektronenhülle der Atome untersucht werden, die Auswirkung der schwachen Wechselwirkung im Kern des Atoms betrachtet.
Die meisten radioaktiven Elemente sind β-Strahler, d.h. sie senden energiereiche Elektronen aus. Das Elektron wird bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton aus dem Kern emittiert. Diese Kernumwandlung bezeichnet man als *β^--Zerfall*, der nach folgender Reaktionsgleichung verläuft:

$$n \quad \rightarrow \quad p^+ + e^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} \tag{6}$$

Dabei bedeuten: n Neutron, p^+ Proton, e^- Elektron und $\bar{\nu}_\mathrm{e}$ Antineutrino.
Daneben existieren noch zwei weitere β-Zerfallsarten, der *K-Einfang* und der *β^+-Zerfall*, die in den gängigen Lehrbüchern der Atom- bzw. Kernphysik beschrieben werden.
Die Spektren von α- und γ-Strahlern unterscheiden sich deutlich von denen der β-Strahler. α- und γ-Strahler emittieren Strahlung mit einem oder einigen wenigen, diskreten Energiewerten. β-Strahler senden dagegen ein kontinuierliches Energiespektrum aus, angefangen von beliebig kleinen Energien bis zu einer für diesen speziellen Zerfall charakteristischen Grenzenergie. Ist dem kontinuierlichen β-Spektrum noch ein diskretes Spektrum überlagert, so handelt es sich hierbei um sogenannte Konversionselektronen, die durch die Wechselwirkung des angeregten Kerns mit den Elektronen der unteren K-Schale in Konkurrenz zur Emission eines γ-Quants ausgesandt werden. Die Energiezustände der Kerne vor und nach β-Emission sind unabhängig von der Energie des emittierten Elektrons. Da ferner das ausgesandte Elektron einen Spin besitzt und der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße darstellt, wurde von Pauli die Existenz des Neutrinos vorgeschlagen, welches ebenso wie das Elektron einen halbzahligen Spin besitzt. Die Gesamtenergie ist gleich der oberen Grenzenergie der Elektronen (Grenzenergie des Spektrums), sie verteilt sich auf das Neutrino und das β-Teilchen.

II. Versuchsaufbau und Messtechnik

II.1. β-Spektrometer

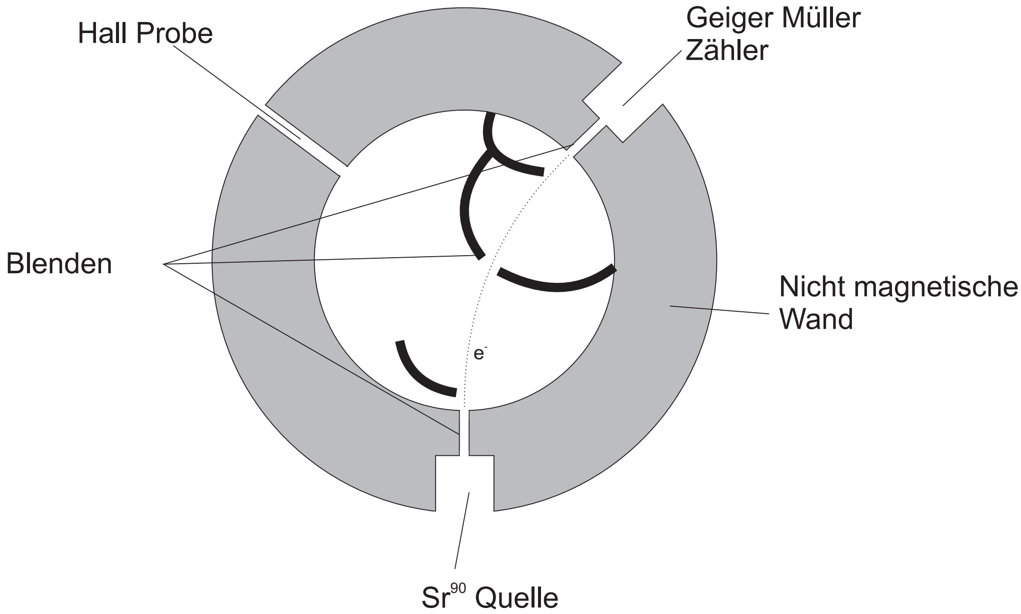

Abbildung 1: Skizze des β-Spektrometers

Die Impulsverteilung der β-Strahlung eines radioaktiven Präparates wird mit einem β-Spektrometer (siehe Abb. 1) bestimmt:
Die von dem Präparat (Sr^{90}) ausgesandte Beta-Strahlung wird in einem nichtmagnetischen Hohlraum durch einen Spalt und mehrere Blenden zu einem schwach divergierenden Elektronenstrahl geformt. Unter dem Einfluss des senkrecht zur Zeichenebene wirkenden homogenen Magnetfeldes werden die Elektronen durch die Lorentzkraft auf Kreisbahnen abgelenkt. Die Radien sind dabei abhängig von der Geschwindigkeit, bzw. dem Impuls der Elektronen und der Magnetfeldstärke.

$$r = \frac{p}{e_0 \cdot B} \tag{7}$$

p = Impuls des Elektrons
B = magnetische Induktion, Umrechnung: $1\,\mathrm{T} \equiv 1\,\mathrm{V\,s\,m^{-2}}$
e_0 = Elementarladung

Nach dem Durchlaufen der Bahn findet für Elektronen gleicher Geschwindigkeit eine Fokussierung statt. Durch einen Austrittsspalt gelangen die Elektronen in das Zählrohr und werden anschließend vom Zähler registriert. Verändert man nun die Stromstärke durch den Elektromagneten und damit das Magnetfeld, so gelangen nur diejenigen Elektronen zum Zählrohr, deren Geschwindigkeit so groß ist, dass ihr Ablenkradius genau

50 mm beträgt. Die Intensität liest man am Zähler ab. Die Feldstärke wird mit dem Magnetometer gemessen.

III. Durchführung

HINWEIS: Der Strom im Elektromagneten darf* 4 A *nicht überschreiten!

III.1. Zählstatistik

1. Stellen Sie das Magnetfeld so ein, dass Sie die Zählrate im Zählrohr maximieren (ungefähr $40\,\mathrm{s}^{-1}$). Stellen Sie bei einer Zählzeit von einer Sekunde die Häufigkeitsverteilung für mindestens 300 Messungen fest.

2. Zeichnen Sie ein Histogramm der Messdaten und berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung (Statistiksoftware R oder Verschiebungssatz[1]).

III.2. β-Spektrometer

1. Messen Sie die Zählrate für jeweils eine Minute bei ansteigenden Magnetfeldstärken B durch den Elektromagneten (0 mT bis 320 mT in Schritten von 10 mT). **Der Strom darf dabei nicht 4 A überschreiten!** Um den Punkt genau zu bestimmen, bei dem gerade noch Elektronen zu registrieren sind (Zählrate = Nullrate), muss im Bereich hoher Feldstärken ($B = 200\,\mathrm{mT}$ bis $300\,\mathrm{mT}$) der Abstand der Messpunkte verringert werden ($\Delta B = 5\,\mathrm{mT}$).

2. Tragen Sie die Zählraten gegen die magnetische Induktion B auf.

3. Berechnen Sie mit Hilfe von Gleichung (7) den maximalen Impuls der Elektronen. Bestätigen Sie, dass es sich um relativistische Elektronen handelt, indem Sie aus dem klassischen Impuls mit der Ruhemasse die Geschwindigkeit berechnen. Berechnen Sie danach $\beta = v/c$, bzw. v aus der relativistischen Beziehung

$$\begin{aligned} p &= \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \gamma \cdot m_0 \cdot v \qquad (\gamma = \text{Lorentz-Faktor}) \end{aligned} \tag{8}$$

und daraus dann die Gesamtenergie

$$W_{ges} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 \qquad (\text{in MeV})\ , \tag{9}$$

die kinetische Energie

$$W_{\mathrm{kin}} = W_{ges} - m_0 \cdot c^2 \qquad (\text{in MeV}) \tag{10}$$

und die Masse

$$m = \gamma \cdot m_0 \quad . \tag{11}$$

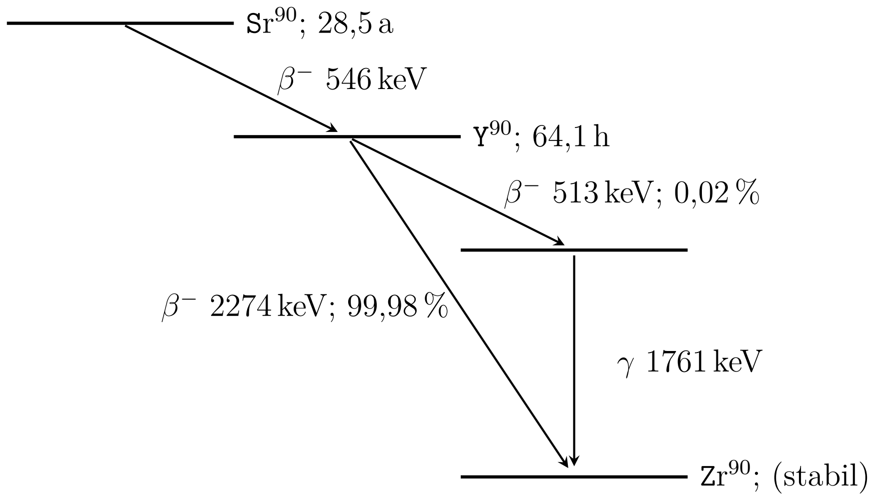

Abbildung 2: Zerfallsdiagramm vom $\mathtt{Sr}^{90}$.

Vergleichen Sie die Masse mit der Ruhemasse der Elektronen. Bestimmen Sie die Kernumwandlungs-Energie des Präparats und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Zerfallsdiagramm vom Sr^{90} in Abbildung 2.

4. Polen Sie den Elektromagneten um und messen Sie die Zählrate für eine Minute bei einem Magnetfeld von ungefähr $-300\,\mathrm{mT}$. Ist die Zählrate anders als bei $+300\,\mathrm{mT}$? Erklären Sie die möglichen Abweichungen.

Hinweise:

- Der Ablenkradius beträgt 50 mm.
- Das Präparat nicht aus dem Spektrometer nehmen! Stellen Sie den Strom langsam auf 0, bevor Sie ihn ausschalten!

Quellen für die Anleitung:

- Anleitung *Versuch Rad* physikalisches Grundpraktikum der Universität Bayreuth.
- Phywe Anleitung β-Spektrometer.

Literatur

[1] URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Verschiebungssatz_(Statistik)`.

[2] Dieter Meschede. “Gerthsen Physik”. In: Springer Berlin Heidelberg, 2015. Kap. 19.2. DOI: `10.1007/978-3-662-45977-5`.