

Versuch M06: Bestimmung von Trägheitsmomenten mit dem Drehtisch

23. Februar 2023

I. Einleitung

Das **Trägheitsmoment** eines Körpers in Bezug auf eine gegebene Achse spielt bei den **Rotationsbewegungen** eine analog fundamentale Rolle, wie die **Masse** bei den Translationsbewegungen.

Dem NEWTON'schen Grundgesetz der Mechanik

$$F = m \cdot a, \quad (1)$$

wobei F die Kraft, m die Masse, a die Beschleunigung des Körpers sind, entspricht im Fall der Rotationsbewegung die Gleichung

$$M = J \cdot \alpha \quad (2)$$

mit M Drehmoment, J Trägheitsmoment, α Winkelbeschleunigung. Dabei berechnet sich das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse zu

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad , \quad \left(\text{bzw. } J = \int r^2 dm \right) \quad , \quad (3)$$

wobei m_i ein Massenelement, r_i sein senkrechter Abstand von der Drehachse bedeuten. $\sum_i m_i = m$ ist die Gesamtmasse des Körpers.

Summen der Art 3 wurde erstmals von Christian HUYGENS als kennzeichnende Größen erkannt bei Berechnungen der Bewegungen physischer Pendel, die er 1673 in seinem berühmten Buch „Horologium oscillatorium“ („Die Pendeluhr“) beschrieb. Die Einführung des Begriffes Trägheitsmoment für den Ausdruck 3 stammt von Leonhard EULER aus der Mitte des 18. Jahrhunderts. Das Trägheitsmoment ist nur für wenige Körper einfacher Gestalt und Massenverteilung berechenbar. Für einen Vollzylinder der Masse m mit dem Radius r , der um seine Symmetrieachse rotiert ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$J_{\text{Zyl}} = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \quad (4)$$

In allgemeinen Fällen muss das Drehmoment experimentell bestimmt werden. Eine häufig angewendete Methode zur Messung von Trägheitsmomenten verwendet einen Drehtisch in der Ausführung eines linearen Drehpendels wie in Figur 1 (ähnlich der Unruhe einer Uhr).

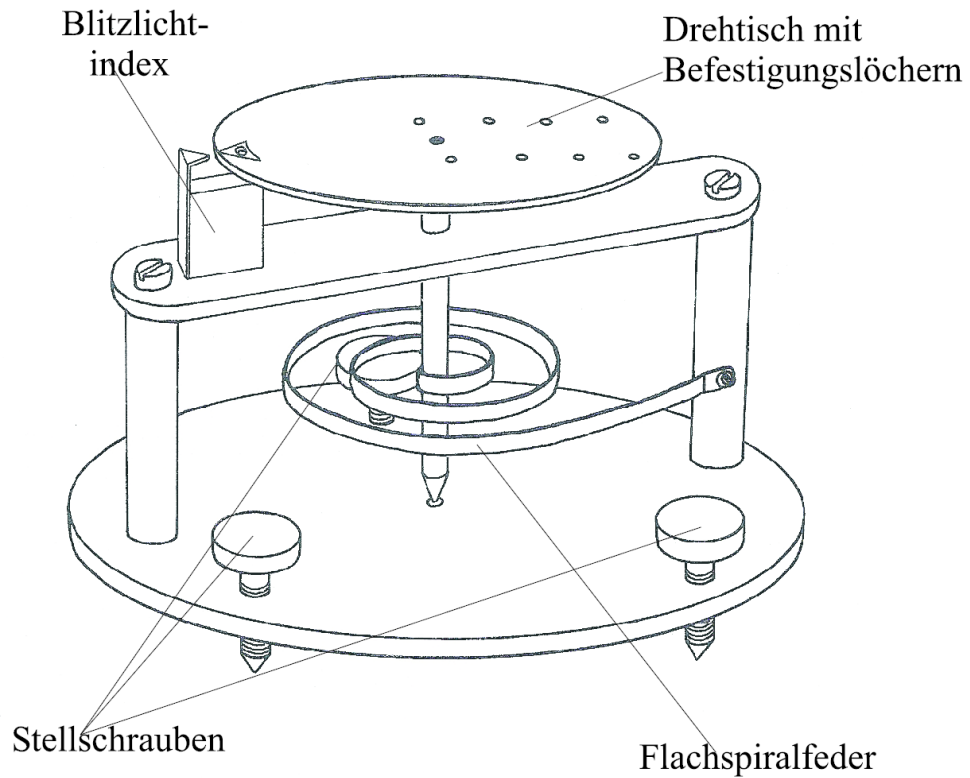


Abbildung 1: Drehtisch zur Messung von Trägheitsmomenten

Regt man einen solchen Drehtisch zu freien Drehschwingungen an, so gilt für die Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_T + J_K}{D^*}}, \quad (5)$$

wobei J_T das Trägheitsmoment des Tisches in Bezug auf seine Drehachse, J_K das Trägheitsmoment des aufgelegten Körpers in Bezug auf die Drehachse des Tisches und D^* die Winkelrichtgröße der Spiralfeder sind.

II. Aufgaben

1. Es soll das Trägheitsmoment J_{Δ} eines dreieckförmigen Körpers um die angegebene Hauptachse ermittelt werden. Hierzu werde zunächst der Drehtisch kalibriert mit Hilfe eines in verschiedenen Abständen a von der Drehachse aufgelegten zylindrischen, homogenen Körpers. Dessen verschiedene Trägheitsmomente $J_K(a) = J_{Zyl}(a)$ in Bezug auf die Drehachse des Drehtisches kann man mit Hilfe des STEINER'schen Satzes (nach dem Mathematiker Jacob STEINER aus dem 19. Jahrhundert) berechnen:

$$J_K(a) = J_{K,0} + m \cdot a^2 \quad (6)$$

mit:

$J_{K,0}$: Trägheitsmoment des Körpers für eine Achse durch den Schwerpunkt des Körpers

m : Masse des Körpers

a : Abstand zwischen Drehachse und Achse durch den Schwerpunkt des Körpers

Trägt man die den verschiedenen Abständen des aufgelegten Zylinders entsprechenden berechneten Trägheitsmomente in Abhängigkeit von den Quadraten der gemessenen zugehörigen Schwingungsdauern auf und zeichnet durch die Messpunkte die **Ausgleichsgerade**, so ist dies die Kalibriergerade des Drehtisches gemäß

$$J_K = \frac{D^*}{4\pi^2} \tau^2 - J_T \quad (7)$$

nach Gleichung 5. Man verwende auch den ebenfalls zur Ausgleichsgeraden gehörenden Messpunkt, den man aus der Bestimmung der Schwingungsdauer des **leeren** Drehtisches erhält.

Nach Messung der Schwingungsdauer mit dem zu untersuchenden dreieckförmigen Körper kann der Grafik das gesuchte Trägheitsmoment J_{Δ} entnommen werden.

2. Man gebe das Trägheitsmoment J_T und die Winkelrichtgröße D^* des Drehtisches an.

III. Hinweise zur Versuchdurchführung

1. Vor Beginn der Messung richte man den Drehtisch so ein, dass seine Drehachse **möglichst genau vertikal** steht. Dies ist gegeben, wenn der Nullpunkt sich nach Auflegen eines Gewichtes an verschiedenen Stellen des Randes des Tisches nicht ändert.
2. Zum Anregen der Drehschwingungen lenke man den Drehtisch um **maximal 180°** aus!
3. Mit Hilfe der Waage und der Schieblehre bestimme man die zur Berechnung der Trägheitsmomente des Zylinders erforderlichen Größen.
4. Zur Bestimmung der Schwingungsdauern führe man jeweils mindestens 3 Messungen über je 10 Schwingungen durch und bilde **Mittelwerte**.
5. Man bestimme rechnerisch und/oder grafisch die Ausgleichsgerade (Kalibriergerade).

Literatur

- [1] Hans Joachim Eichler, Heinz-Detlef Kronfeldt, Jürgen Sahn: *Das neue Physikalische Grundpraktikum*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 2016. 3. Auflage. S. 66ff.