Versuch M06
Bestimmung von Trägheitsmomenten mit dem Drehtisch

12. März 2020

I Lernziele

- Rotationsbewegung
- Trägheitsmoment des starren Körpers
- Drehtisch für Bestimmung der Trägheitsmomenten

II Physikalische Grundlagen

II.1 Translation und Rotation

In diesem Versuch beschäftigen wir uns mit der **Rotation** eines starren Körpers, also eines Körpers, der aus fest miteinander verbundenen Teilchen besteht.

In der klassischen NEWTON'schen Mechanik unterscheidet man zwischen zwei Hauptbewegungsformen - **Translation** und **Rotation**.
Unter **Translation** verstehen wir eine geradelinige Bewegung.
Rotationen sind Drehungen von Rädern, Uhrzeigern, Planeten usw [1].
Translation und Rotation sind den analogen Bewegungs- und Erhaltungsgesetzen unterworfen. Diese Analogien helfen uns die Rotation zu beschreiben.
Es gibt aber auch die wichtige Unterschiede, die wir beachten mussen.
Abb.1 hilft diese Unterschiede zu verstehen.

Betrachten wir den starren Körper als die Summe von n Massenpunkten [2].
Die **kinetische Energie** eines Massenpunktes:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \tag{1}$$

wobei m die Masse und v die Geschwindigkeit sind.

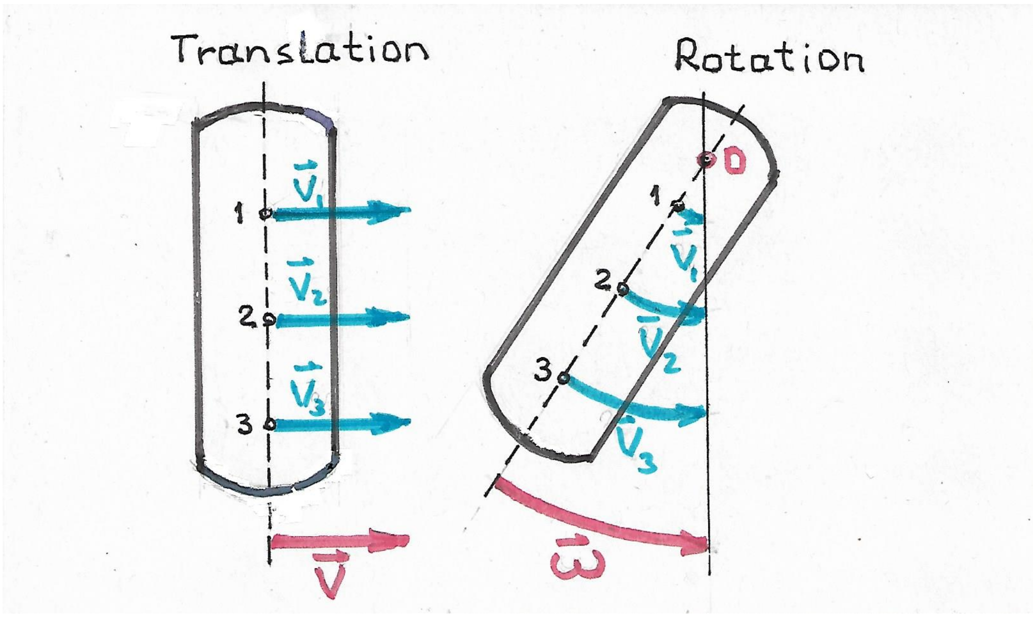

Abbildung 1: Translations- und Rotationsbewegung.

Aus der Abb.1 ist gut zu sehen, dass die Geschwindigkeiten aller Massenpunkte bei der **Translationsbewegung** gleich sind. Die kinetische Energie des ganzes Körpers wird dann die Summe der Energien aller seine Massenpunkte:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 \qquad \left(\text{bzw. } E_{kin} = \frac{1}{2}\int v^2 \mathrm{d}m\right) \tag{2}$$

wobei m_i ein Massenelement und v_i seine Geschwindigkeit bedeuten.
$\sum_i m_i = m$ ist die Gesamtmasse des Körpers. (Bei homogener Massenverteitung im Körper wird Integral genommen.)

Bei der **Rotationsbewegung** beschreibt jeder Massenpunkt des Körpers einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Drehachse liegt (Abb.1). In diesem Fall sprechen wir von der Bahngeschwindigkeit V_i des Massenpunktes m_i und seiner Winkelgeschwindigkeit ω_i (Omega):

$$\omega_i = \frac{V_i}{r_i} \tag{3}$$

wobei V_i die Bahngeschwindigkeit des Massenpunktes des Körpers und r_i sein senkrechter Abstand von der Drehachse bedeuten.

II.2 Trägheitsmoment

Wenn wir die (2) für die **Rotationsbewegung** anwenden, haben wir ein wesentliches Problem - wie die Abb.1 zeigt, sind nicht alle Bahngeschwindigkeiten V_i gleich groß, sie sind vom Abstand zur Drehachse abhängig.
Lösung ist $V_i = \omega_i r_i$ aus der (3) anzusetzen.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_i r_i)^2 = \frac{1}{2} (\sum_i m_i r_i^2) {\omega_i}^2 \tag{4}$$

Der Klammerausdruck ($\sum_i m_i r_i^2$) gibt an, wie die Masse des rotierenden Körpers um die Drehachse verteilt ist.

Diese Größe wird in der Physik das **Trägheitsmoment** I des Körpers bezüglich auf die jewelige Achse genannt.
Für einen bestimmten starren Körper und eine bestimmte Achse ist I eine Konstante.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad \left(\text{bzw. } I = \int r^2 \mathrm{d}m \right) \tag{5}$$

wobei m_i ein Massenelement und r_i sein senkrechter Abstand von der Drehachse sind und $\sum_i m_i = m$ ist die Gesamtmasse des Körpers. (Bei homogener Massenverteilung im Körper wird Integral genommen).

Die Einführung des Begriffes **Trägheitsmoment** für den Ausdruck (5) stammt von Leonhard Euler aus der Mitte des 18. Jahrhunderts.

Nur für wenige Körper ist das Trägheitsmoment einfacher Gestalt und Massenverteilung berechenbar.
Für einen Vollzylinder der Masse m mit dem Radius r, der um seine Symmetrieachse rotiert zum Beispiel ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$I_{Zyl} = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \tag{6}$$

In allgemeinen Fällen muss das Trägheitsmoment aber experimentell bestimmt werden.

II.3 Drehtischmethode

Eine häufig angewendete Methode dafür ist die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit einen Drehtisch.

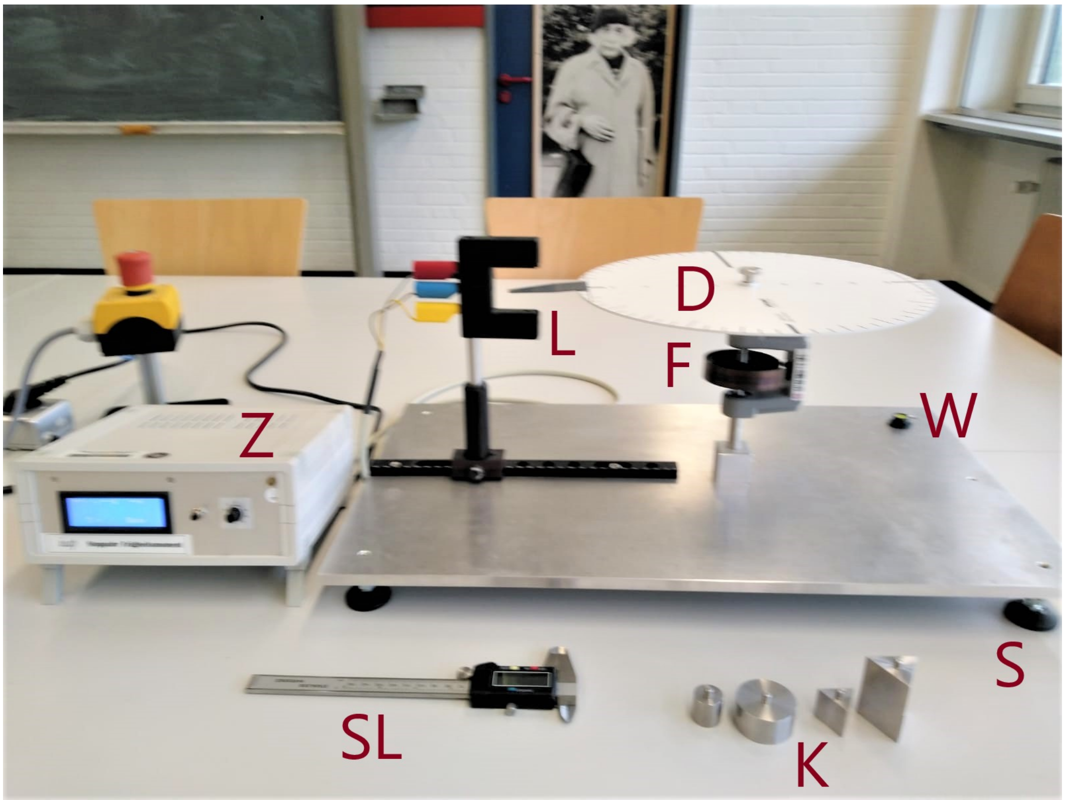

Abbildung 2: Drehtisch und Versuchsaufbau in unserem Labor.
D - Drehtisch mit Befestigungslöchern, **F** - Spiralfeder, **L** - Lichtschranke, **W** - Wasserwaage, **S** - Stellschrauben, **Z** - Zeitmessgerät (feine elekronische Stoppuhr), **SL** - Schieblehre, **K** - Proberkörper

Abb.2 zeigt und erklärt den kompletten Versuchsaufbau mit dem Drehtisch in unserem Labor.

Regt man einen solchen Drehtisch zu freien Drehschwingungen an, so gilt für die **Schwingungsdauer**:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_T + I_K}{D}} \tag{7}$$

wobei I_T das Trägheitsmoment des Tisches in Bezug auf seine Drehachse, I_K das Trägheitsmoment des aufgelegten Körpers in Bezug auf die Drehachse des Tisches sind und D - **rücktreibender Moment der Spiralfeder**.

Wenn der Körper aber nicht zentral, sondern im **Abstand** R **von der Drehachse** angebracht wird (Befestigungslöher auf dem Drehtisch, Abb.2), wird das Trägheitsmoment mit dem STEINER'schen Satz (nach dem Mathematiker JACOB STEINER aus dem 19. Jahrhundert) berechnet:

$$I_r = I_s + m \cdot R^2 \tag{8}$$

wobei I_r das Trägheitsmoment um eine Achse, die von der Schwerpunktachse des Probekörpers den Abstand R aufweist, I_s das Trägheitsmoment um die Schwerpunktachse und m die Masse des Körpers sind.

Mit Hilfe einer solchen Drehtischanordnung, bei der die Möglichkeit des Aufsetzens von Probekörpern in verschiedenen Abständen R von der Drehachse gegeben ist, werden wir in diesem Versuch die **Trägheitsmomente** einiger Körper bestimmen.

III Aufgaben

1. Prüfen Sie mit der Wasserwaage (Abb.2) die **waagerechte Lage** des Drehtisches.

2. Wählen Sie den **Auslenkungswinkel** (maximal 180 Grad) und begründen Sie Ihre Wahl.

3. Mit Hilfe der Waage und der Schieblehre (Abb.2) bestimmen Sie die **Massen** der Proberkörper und die **Abstände** auf dem Drehtisch.

   Notieren Sie die **Messfehler** für die spätere **Fehlerrechnung**.

4. Berechnen Sie (nach (6)) das **Trägheitsmoment des zylindrischen Körpers** I_{Zyl0}, der für die Kalibrierung des Drehtisches verwendet werden soll.

5. Legen Sie den Zylinder in verschiedenen Abständen R von der Drehachse auf die Platte des Drehtisches und messen Sie die entsprehenden **Schwingungsdauern** T mit einer elektronische Stoppuhr (Zeitmessgerät **Z**, Abb.2).

   Notieren Sie den **Messfehler** bei der Zeitmessung.

   Zur Bestimmung der Schwingungsdauern führen Sie jeweils mindestens 3 Messungen über je 5 Schwingungen durch und bilden Sie die **Mittelwerte** von T.
   Erstellen Sie eine Tabelle **(Tab.1)** mit Ihren Messdaten.

6. Ermitteln Sie durch Anwendung des STEINER'schen Satzes die **Gesamtträgheitsmomente** I_{Zyl} fur verschiedene Abstände R von der Drehachse.

7. Tragen Sie die den verschiedenen Abständen des aufgelegten Zylinders entsprechende berechnete Trägheitsmomente I_{Zyl} in Abhängigkeit von den Quadraten der gemessenen zugehörigen Schwingungsdauern auf Millimeterpapier auf **(Diagramm 1)** und zeichnen Sie durch die Messpunkte die **Ausgleichsgerade**.
   Das ist die **Kalibriergerade des Drehtisches**.
   Verwenden Sie auch den ebenfalls zur Ausgleichsgeraden gehörenden Messpunkt, den man aus der Bestimmung der Schwingungsdauer des **leeren** Drehtisches erhält.

8. Aus der **Kalibriergerade** gemäß:

$$I_K = \frac{D}{4\pi^2}T^2 - I_T \tag{9}$$

   (abgeleitet von (7)), entnehmen Sie das Trägheitsmoment des Tisches I_T und berechnen Sie den **rücktreibenden Moment der Spiralfeder** D.

9. **Bestimmen Sie mit dem jetzt kalibirerten Drehtisch das Trägheitsmoment eines anderen Körpers (Prisma)** I_{Pr0}.

   Führen Sie die gleiche Messungen, wie mit dem Zylinder durch und erstellen Sie eine Tabelle **(Tab.2)** mit Ihren Messwerten.

10. Berechnen Sie wieder die Mittelwerte für T und entnehmen Sie aus der Kalibriergerade die **Gesamtträgheitsmomente** I_{Pr} für verschiedene Abstände R.

11. Berechnen Sie daraus das **Trägheitsmoment der Prisma** I_{Pr0}

12. Führen Sie die **Fehlerrechnung** fur I_{Zyl0} ,I_{Zyl} und D durch.

    *Fehlerrechnung unter:
    ieap.uni-kiel.de/lehre/nebenfach/praktika/nfprakt/pdf /Fehlerabschaetzung_und_Fehlerrechnung.pdf

13. Wie finden Sie die Drehtischmethode für die Beschtimmung der Trägheitsmomente?

Unterscheiden sich die Trägheitsmomente von Zylinder und Prisma gleicher Masse und warum?
Schreiben Sie Ihre kurze **Zusammenfassung** des Versuches und erklären Sie Ihre Ergebnise am Ende des Protokolls.

IV Fragen und Diskussionspunkte

- Wie wird das Trägheitsmoment definiert? Analogien zu Translation.
- Haben alle Massenpunkte eines starren Körpers bei der Rotationsbewegung die gleiche kinetische Energie? Warum?
- Welche Gleichung beschreibt die Periode einer Drehschwingung?
- Wie lautet der Satz vom Steiner?
- Welchen Auslenkungsgrad vom Drehtisch soll man besser nehmen? Warum?

Literatur

[1] D. Halliday, R. Resnik, J. Walker: *Halliday Physik.* Wiley-VCH 2001, 2. Auflage, S .288-289.

[2] Ch. Kommer, T. Tugendhat, N. Wahl: *Tutorium Physik fürs Nebenfach* Springer-Spektrum, 2. Auflage, S. 105-107.

[3] H.J. Eichler, H.-D. Kronfeld, J. Sahm: *Das neue Physikalische Grundpraktikum.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 2016, 3. Auflage, S. 100.

■ **NEUE ANLEITUNGEN** haben wir in diesem Semester für Sie bereit gestellt.
Wie finden Sie sie: sind sie verständlig geschrieben und hilfreich?
Ihre Meinung wird uns sehr interessieren.