Versuch M09: Analysenwaage

23. Februar 2023

I. Vorbemerkung

Wägen bedeutet **Messung der Masse** eines Körpers. Es gibt Hinweise, dass bereits vor fast 10 000 Jahren Menschen zu wägen gelernt hatten, und die recht genaue Darstellung der Ausführung einer gleicharmigen Balkenwaage ist zum Beispiel auf einer der ägyptischen Pyramiden von Gizeh (ca. 3000 v. Chr.) zu sehen.
Messen heisst **Vergleichen**. Das internationale Massenormal ist seit 1889 der 1 kg-Platin-Iridium-Zylinder von ca. 39 mm Höhe und ca. 39 mm Durchmesser, der im **Pavillon de Breteuil à Sèvres** in der Nähe von Paris aufbewahrt wird. Während im Laufe der Zeit nach der 1. General-Konferenz für Maße und Gewichte von 1889 zum Beispiel die Basiseinheiten der Zeit und der Länge entsprechend dem Fortschritt der physikalischen Messkunde mehrmals verbessert werden konnten, gelang es allein bei der Masseneinheit bisher noch nicht. Die **Genauigkeit** des Massenormals und die der besten derzeitigen Waagen liegt bei

$$\frac{\Delta m}{m} = 10^{-9} \tag{1}$$

II. Einleitung

Zu der Gruppe der Fein-Waagen zählen die sogenannten **Analysenwaagen**, die es in Ausführungen für Höchstlasten von ca. 0,1 g bis ca. 200 g gibt bei relativen **Ablesbarkeiten** von $\frac{\Delta m}{m}$ = ca. 10^{-5} bis ca. 10^{-6}.
Die hier vorliegende Balkenwaage ist ein **dreiarmiger Hebel** und dient dem sehr genauen Massenvergleich unter Ausnutzung der **Hebelgesetze**.
Abbildung 1 zeigt eine Prinzipskizze der Waage. Zum Schutz gegen Staub und Luftzug befindet sie sich unter einem Glasgehäuse. Der wichtigste Teil ist der starre Waagebalken. Er setzt sich zusammen aus dem leichten und durchbiegungsfesten Gitterbalken 1 aus einer hochfesten Aluminiumlegierung, in den die gehärteten Stahlschneiden 2, 3, 4 fest eingesetzt sind, sowie aus dem Zeiger 5 und dem fest mit dem Balken verbundenen Reiterlineal 6. Auf ihm kann ein 10 mg schwerer Drahtbügel (Reiter) 7 als Laufgewicht zum Feinabgleich mit Hilfe eines speziellen Manipulators abgelegt werden. Die Mittelschneide 2 liegt auf dem polierten Achatplättchen 8 der Säule der Waage auf, während die entsprechenden Plättchen 9 und 10 auf den Seitenschneiden 3 und 4 des Waagebalkens liegen und die jeweiligen Waagschalen mit dem Wägegut 11 und den Gewichten 12 tragen.

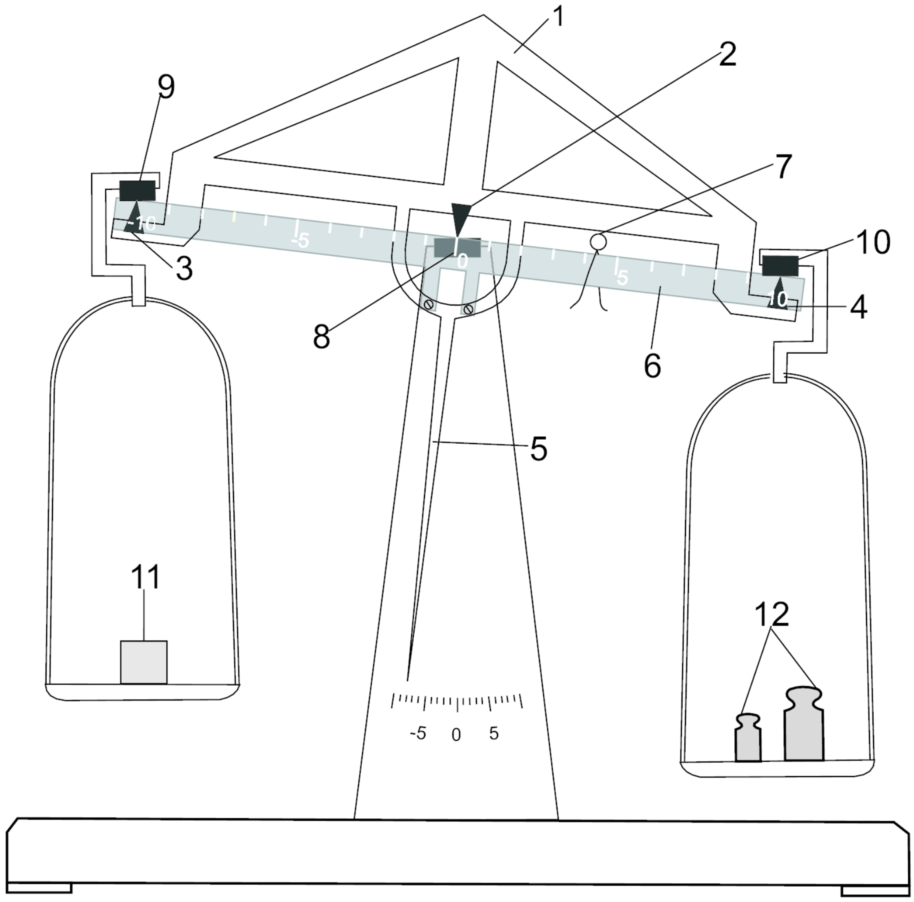

Abbildung 1: Gleicharmige Balkenwaage

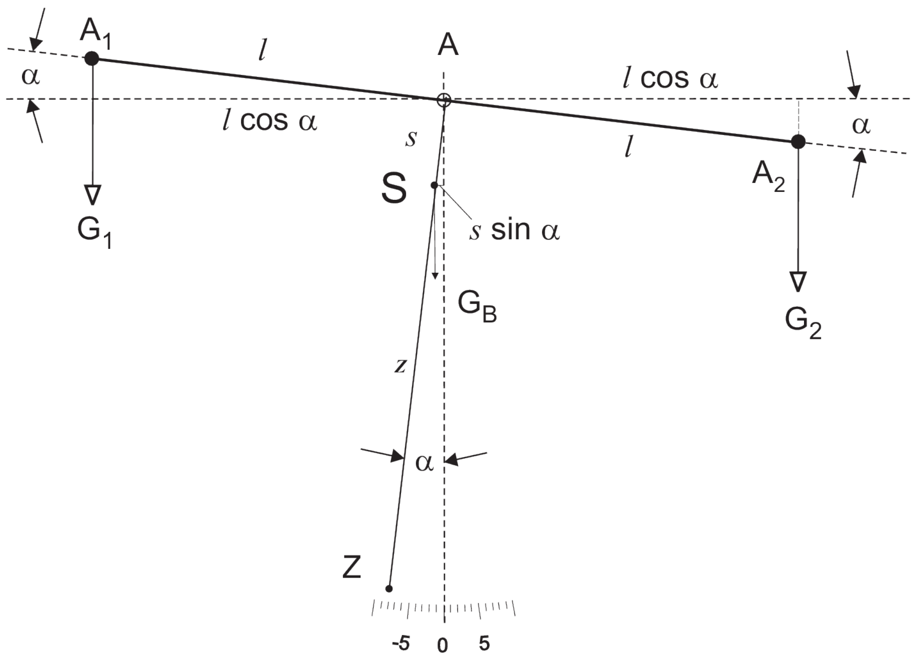

Abbildung 2: Bestimmungsgrößen der gleicharmigen Balkenwaage

II.1. Zur Theorie

In guter Näherung fasst Abbildung 2 die wesentlichen Bestimmungsstücke der gleicharmigen Balkenwaage zusammen. Die drei Hebelarme des Waagebalkens sind:

$\overline{A_1A}$: linker Hebelarm der Länge l

$\overline{AA_2}$: rechter Hebelarm der Länge l

$\overline{AS}$: Hebelarm der Länge s, das ist der Abstand des Schwerpunktes S (das ist der Massenmittelpunkt des kompletten Waagebalkens, d.h. inklusive aller mit ihm **starr** verbundenen Teile) vom Drehpunkt A

ferner bedeuten:

$\overline{AZ}$: Länge des Zeigers z
α: Drehwinkel des Waagebalkens

Das Zeigerende spielt vor einer Skala mit gleichmäßiger Strichteilung η in Skalenteilen pro Zentimeter.
G_1, G_B, G_2 sind die Gewichtskräfte der Masse m_1 des Wägegutes, der Masse m_B des Waagebalkens, der Masse m_2 der Massenstücke des „Gewichtssatzes“ (besser sollte man Massensatz sagen).
Wenn die Waage im Gleichgewicht ist, ist die Summe der linksdrehenden Drehmomente gleich der Summe der rechtsdrehenden Drehmomente, d.h.

$$m_1 \cdot g \cdot l \cdot \cos\alpha + m_B \cdot g \cdot s \cdot \sin\alpha = m_2 \cdot g \cdot l \cdot \cos\alpha \tag{2}$$

wobei g die Erdbeschleunigung bedeutet.
Praktisch ist beim Wägen zunächst immer $\alpha \neq 0$, d.h. $m_1 \neq m_2$. Sei $m_2 = m_1 + \Delta m$, dann gilt für den Ausschlag α:

$$\tan\alpha = \frac{l}{m_B \cdot s} \cdot \Delta m \tag{3}$$

und für kleine Winkel α

$$\alpha = \frac{l}{m_B \cdot s}\Delta m = \frac{n}{z \cdot \eta}, \tag{4}$$

wobei n die Anzahl der Skalenstriche des Zeigerausschlages bedeutet. Die Empfindlichkeit ϵ der Waage wird üblicherweise in Skalenteilen pro Milligramm angegeben und berechnet sich zu

$$\epsilon = \frac{n}{\Delta m} = \frac{l}{m_B s} \cdot z \cdot \eta \tag{5}$$

II.2. Messverfahren

Die kleinste Masseneinheit unseres Gewichtssatzes beträgt 10 mg. Kleinere Masseneinheiten bis 0,1 mg lassen sich durch einen Reiter ersetzen, der auf eine in 100 Teile geteilte Skala des Reiterlineals des Waagebalkens gesetzt werden kann.
Als den **Nullpunkt** der Waage bezeichnen wir diejenige Stelle auf der unteren Skala, auf die sich der Zeiger bei unbelasteter oder beidseitig gleichbelasteter Waage einpendeln würde. Er fällt in der Regel nicht mit dem Nullpunkt in der Mitte der Skala zusammen und führt auch häufig in Folge von äußeren Einflüssen kleine, langsame Wanderungen aus. Deshalb sollte vor und nach einer Messung jeweils der Nullpunkt bestimmt werden. Man darf dann annehmen, dass das arithmetische Mittel der beiden Punkte den Nullpunkt während der Messung darstellt.
Nach dem Auflegen der Gewichte entarretiert man die Waage vorsichtigt, wobei sie meist von selbst zu schwingen beginnt. Es wird **grundsätzlich bei schwingender Waage gemessen**.
Dies gilt auch bei der Nullpunktsbestimmung. Tritt keine Schwingung ein, so kann man durch vorsichtige Handhabung der Arretierungsvorrichtung Schwingungen hervorrufen. Die Schwingungsweite des Zeigers muss innerhalb der Skala liegen! Nach dem Entarretieren lässt man die Waage zunächst einige Schwingungen ausführen, damit etwa eingetretene Störungen abklingen können. Dann liest man **fünf aufeinanderfolgende Umkehrpunkte** A_i ab und bestimmt hieraus durch Mittelwertbildung

$$A_0 = \frac{1}{8}\left(A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4 + A_5\right) \tag{6}$$

die Gleichgewichtslage A_0 der Waage.

II.3. Zur Behandlung der Waage

Bei der hier benutzten Waage handelt es sich um ein sehr genaues und empfindliches Messgerät, das einer äußerst sorgfältigen Behandlung bedarf. Die folgenden Punkte sind besonders zu beachten:

1. Die Waage soll nur während der Dauer der Ablesung entarretiert sein. Nach Ablesung der schwingenden Waage soll **sanft während des Nulldurchganges** wieder arretiert werden.

2. Das Arretieren und Entarretieren muss sehr vorsichtig geschehen, um die Lager der Waage nicht zu beschädigen.

3. Das Auflegen von Körpern und Gewichtsstücken darf nur im arretierten Zustand erfolgen!

4. Die Waage darf nur dann vollständig entarretiert werden, wenn auf beiden Waagschalen nahezu die gleiche Masse aufliegt.

5. Die Gewichtstücke sowie das Messobjekt dürfen nur mit den dafür bestimmten Pinzetten, jedoch **niemals mit der Hand** angefasst werden.

6. Der Reiter wird mit einem von außen verschiebbaren Haken auf den gewünschten Teilstrich des Reiterlineals des Waagebalkens platziert.

7. Der Waagekasten soll nur im Bedarfsfall (z.B. beim Auflegen der Gewichte) an den Seitentüren geöffnet und gleich wieder geschlossen werden.

III. Aufgabenstellung

1. Zunächt ist die Empfindlichkeit ϵ der Waage bei den Belastungen 0 g, 50 g, 100 g, 150 g zu ermitteln. Als Empfindlichkeit bezeichnet man die Verschiebung des Nullpunktes in Abhängigkeit von kleinen Massenunterschieden Δm der auf beiden Waagschalen aufgelegeten Massen gemäß Gleichung (5):

$$\epsilon = \frac{n}{\Delta m}, \tag{7}$$

   wobei n die Anzahl der Skalenstriche bedeutet. Den Massenunterschied von $\Delta m = 2\,\mathrm{mg}$ realisiere man durch eine Verschiebung des Reiters um 2 große Teilstriche auf dem Reiterlineal.

2. Die gemessenen Empfindlichkeiten sind auf Millimeterpapier gegen die aufgelegten Massen aufzutragen. Die vier Messpunkte sind durch einen Polygonzug miteinander zu verbinden.

3. Bestimmen Sie die Masse m_p eines Titan-Probekörpers unter Zuhilfenahme der gemessenen Empfindlichkeit aus je einer Messung auf beiden Seiten der Waage und anschließender Mittelwertbildung. Mit dieser Doppelwägung (auch Transpositionswägung nach Antoine Laurent LAVOISIER (1743-1794) oder Vertauschungswägung nach Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) genannt) eliminiert man den fehlerhaften Einfluss des meist vorhandenen sehr geringen Unterschiedes der Längen des linken und rechten Hebelarmes.

4. Korrigieren Sie den Fehler, der durch den Auftrieb der Luft entsteht.

5. Berechnen Sie den Schwerpunktsabstand s dieser Analysenwaage im unbelasteten Fall aus der gemessenen Empfindlichkeit ϵ unter Anwendung von Gleichung (5).

IV. Hinweise zur Versuchsdurchführung

Um den Versuch in der vorgegebenen Zeit durchführen zu können sind eine gewissenhafte Vorbereitung und zügige Vorgehensweise unerlässlich!

Zu Aufgabe 3: Beginnen Sie mit einer groben Bestimmung der Masse durch Auflegen verschiedener Gewichtsstücke und **sehr vorsichtiges nicht vollständiges** Entarretieren, bis auf beiden Waagschalen die gleiche Masse aufliegt. Schreiben Sie die einzelnen aufgelegten Gewichtsstücke mit ihren angegebenen Fehlern in das Protokoll. Dann bestimmen Sie den Nullpunkt der Waage. Anschließend führen Sie die Messungen abwechselnd auf der linken und rechten Waagschale aus und bestimmen zwischendurch jeweils wieder den Nullpunkt. Beenden Sie die Messreihe ebenfalls mit einer Nullpunktsbestimmung.

Zu Aufgabe 4: Die Massenangabe für die Gewichtsstücke gilt für die Benutzung im Vakuum. In der Luft erfahren alle Körper einen Auftrieb gemäß dem **Archimedischen Prinzip**. Die zur Korrekturrechnung benötigten Dichten betragen:

Dichte der Luft	$\rho_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$
Dichte der Gewichtsstücke	$\rho_g = 8{,}4\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$
Dichte des Probekörpers	$\rho_p = 4{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$

Zu Aufgabe 5: Der Schwerpunktsabstand ergibt sich aus dem Grundgesetz der Statik unter Zuhilfenahme der Definition der Empfindlichkeit gemäß Gleichung (5) nach Einsetzen folgender Konstanten der Waage:

Zeigerlänge	$z = 29\,\mathrm{cm}$
Gesamtlänge des Waagenbalkens	$2l = 14\,\mathrm{cm}$
Masse des Waagebalkens	$m_B = 77{,}48\,\mathrm{g}$
Skala	$\eta = 12{,}5\,\mathrm{Skalenteile/cm}$

Literatur

[1] Wolfgang Schenk, Friedrich Kremer, Gunter Beddies, Thomas Franke, Petrik Galvosas, Peter Rieger: *Physikalisches Praktikum* Springer Spektrum 2014. 14. Auflage. S. 29ff.