

Versuch W02: Thermische Ausdehnung von Metallen

3. März 2023

I. Lernziele

- Wechselwirkungspotential im Festkörper
- Gitterschwingungen
- Ausdehnungskoeffizient

II. Physikalische Grundlagen

Die thermische Längen- bzw. Volumenausdehnung spielt in vielen technischen Bereichen eine große Rolle. Bei genauen Thermometern etwa muß neben der Ausdehnung der Thermometerflüssigkeit immer auch die Ausdehnung des Thermometerkörpers berücksichtigt werden. Der Brückenbau ist ein weiteres Beispiel.

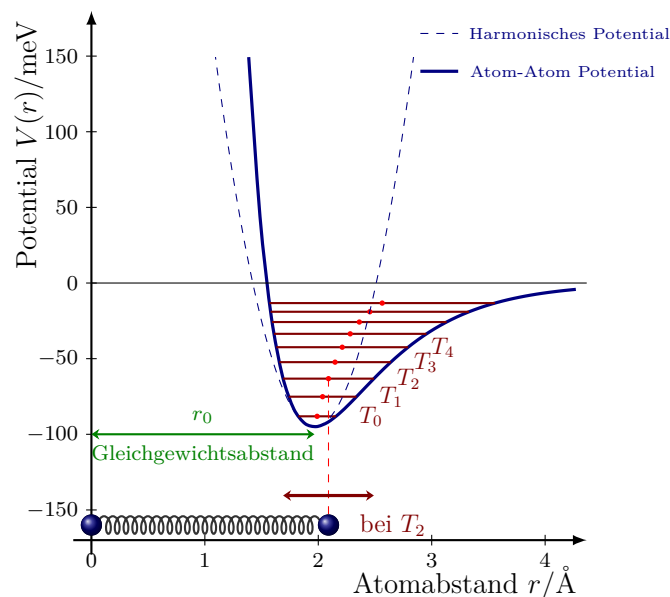


Abbildung 1: Potentialverlauf in Abhängigkeit vom Atomabstand r . Typischer Verlauf, Werte materialabhängig.

Die Bindungskräfte zwischen den Atomen (oder Molekülen) eines Festkörpers (für Flüssigkeiten gelten ähnliche Überlegungen) lassen sich gemäß ihrer verschiedenen Bindungsarten (van der Waals-Wechselwirkung, ionisch, kovalent oder metallisch) charakterisieren. Der prinzipielle Verlauf des Wechselwirkungspotentials $V(r)$ zweier Atome hat in

vielen Fällen die in Abb. 1 gezeigte Form. Bei $r = r_0$, im Potentialminimum, liegt für tiefe Temperaturen der Gleichgewichtsabstand. Bei kleineren Abständen wirken große Abstoßungskräfte

$$F_{\text{rep}} = -\frac{\partial V}{\partial r} \propto r.$$

Dementsprechend variiert die Kraft linear mit dem Abstand. Bekannte Beispiele dafür sind der Massenpunkt an einer Feder oder das Fadenpendel bei kleinen Auslenkungen. Tatsächlich gilt diese Linearität nur in einem eingeschränkten Temperaturbereich, da die Kraftkonstanten selbst, d. h. die Form des Potentials, sich mit der Temperatur ändern. Für kleine Auslenkungen Δr kann das Potential $V(r)$ quadratisch um r_0 entwickelt werden:

$$V(r) = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} \Delta r^2.$$

Die Gitterbausteine führen dann harmonische Schwingungen aus:

$$r(t) = r_0 + \Delta r \sin(\omega t).$$

Als zeitlicher Mittelwert

$$\langle r \rangle_t = \int r(t) dt$$

ergibt sich r_0 , also keine thermische Ausdehnung. Mit der Temperatur steigt auch die Schwingungsamplitude Δr . Für Abstände, die weiter von r_0 entfernt liegen, weicht das Potential $V(r)$ stark vom Parabelpotential ab. Um $V(r)$ nun korrekt zu beschreiben, müssen in der Näherung höhere als der quadratische Term, die sog. anharmonischen Terme, berücksichtigt werden.

Bei höheren Temperaturen kann das Potential $V(r)$ dann durch

$$V(\Delta r) = c\Delta r^2 - g\Delta r^3 - f\Delta r^4, \quad (1)$$

genähert werden, wobei c , g und f positive Kraftkonstanten sind. Der Term mit Δr^3 gibt die Asymmetrie in der gegenseitigen Abstoßung der Atome wieder und der Term mit Δr^4 die Abschwächung des Potentials bei Amplituden größer r_0 . Bei der Berechnung der mittleren Auslenkung sind die möglichen Δr -Werte entsprechend ihrer thermodynamischen Wahrscheinlichkeit nach der Boltzmann-Verteilung zu wichten.

$$\langle \Delta r \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} r \exp(-\beta V(r)) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta V(r)) dr} \quad (2)$$

Sind die anharmonischen Terme in der Energie klein gegen $\beta = (k_B T)^{-1}$, so läßt sich der Ausdruck entwickeln,

Nebenrechnung:

$$\int r e^{-\beta V} dr \approx \int e^{-\beta c r^2} (r + \beta g r^4 + \beta f r^5) dr = \frac{3\sqrt{\pi}g}{\sqrt{c^5\beta^3}} \quad (3)$$

$$\int e^{-\beta V} dr \approx \int e^{-\beta c r^2} dr = \sqrt{\frac{\pi}{\beta c}} \quad (4)$$

woraus für den klassischen Bereich

$$\langle \Delta r \rangle = \frac{3g}{4c^2} k_B T \quad (5)$$

folgt.

Damit verschiebt sich der Schwingungsmittelpunkt $\langle r \rangle$ zu größeren r , d. h. der Abstand der Atome steigt mit der Temperatur an und bewirkt eine thermische Ausdehnung.

Für eine makroskopische Länge l gilt über einen weiten Temperaturbereich ein linearer Zusammenhang für die thermische Ausdehnung:

$$l = l_0(1 + \alpha_1(T - T_0)), \quad (6)$$

wobei l_0 die Anfangslänge bei der Anfangstemperatur T_0 und α_1 den sog. Längenausdehnungskoeffizienten bezeichnen. Die relative Längenänderung α_1 ist definiert als

$$\alpha_1 := \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_p. \quad (7)$$

Der Index p bedeutet, daß die Längenänderung bei konstantem Druck betrachtet wird. Für Längenänderungen Δl , die klein gegenüber der Anfangslänge l_0 sind, gilt in guter Näherung

$$\alpha_1 = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta T}. \quad (8)$$

Über weite Bereiche ist α_1 konstant, für sehr tiefe Temperaturen $T \rightarrow 0$ geht er jedoch gegen null, und für hohe Temperaturen steigt er leicht an.

Wärmeenergie ist im Festkörper in Form von kollektiven Schwingungen der Gitterbausteine um ihre Gleichgewichtslage, den sog. Phononen, gespeichert.

III. Meßanordnung

Mit dem bereitgestellten Dilatometer (Abb. 2) kann der Längenausdehnungskoeffizient bestimmt werden.

Ein Rohr des zu untersuchenden Materials wird an einem Ende fest eingespannt. Das andere Ende ist frei beweglich gelagert und drückt gegen eine Meßuhr. Mit dieser Meßuhr lassen sich Längenänderungen auf 1/100 mm genau bestimmen.

Um die Temperatur des Rohres zu regulieren, wird es an den Wasserkreislauf eines Tauchsieders mit integrierter Pumpe angeschlossen.

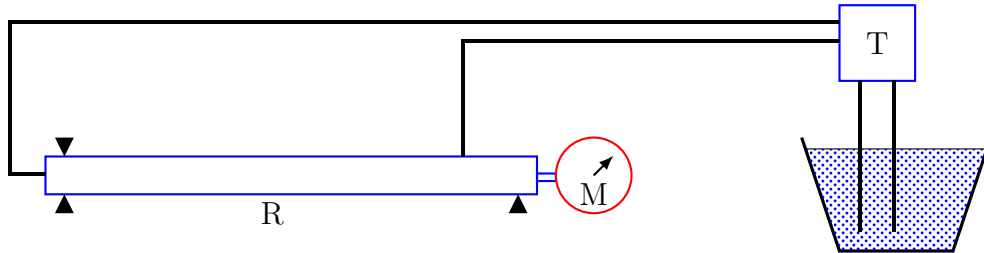


Abbildung 2: Dilatometer (schematisch).

R: Rohr; *M*: Meßuhr; *T*: Thermostat mit Pumpe.

IV. Aufgaben

Für Rohre aus Kupfer, Aluminium und Stahl soll jeweils der Längenausdehnungskoeffizient α_1 bestimmt werden.

- Die Temperatur soll zwischen Zimmertemperatur und 70 °C reguliert werden.
- Messen Sie die Längenänderung jedes Rohres beim Aufheizen in Abständen von 5 °C.
- Fertigen Sie eine Grafik mit den Meßpunkten und der Ausgleichsgeraden an und ermitteln Sie mit Hilfe der Geradensteigung und der Gleichung 8 den Längenausdehnungskoeffizienten der jeweiligen Metalle.
- Vergleichen Sie die erhaltenen Längenausdehnungskoeffizienten mit den in Tab. 1 angegebenen Literaturwerten¹ und geben Sie die Abweichung davon an.

Material	Aluminium	Kupfer	Stahl
$\alpha_1 / 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	23	17	11

Tabelle 1: Längenausdehnungskoeffizienten verschiedener Materialien.

¹entnommen aus: Halliday, Resnick: Physics; Wiley & Sons: New York, 1977

Es soll nun der Zusammenhang zwischen Längenänderung Δl und der Gesamtlänge l_0 anhand des Aluminiumrohres untersucht werden.

- Das Rohr wird in den Längen 600 mm, 400 mm und 200 mm eingespannt und jeweils die Längenänderung Δl für eine Temperaturdifferenz von 20 °C gemessen.
- Tragen sie Δl über der Gesamtlänge l_0 auf und überzeugen Sie sich so davon, daß zwischen beiden Größen ein linearer Zusammenhang besteht. Vergleichen sie den Wert der Geradensteigung mit demjenigen, der sich aus Gl. (8) mit dem vorher ermittelten α_1 von Aluminium ergibt.

V. Fragen und Diskussionspunkte

- Geben Sie die Definitionen und die differentiellen Zusammenhänge untereinander von Kraft, Beschleunigung, Geschwindigkeit, Energie (kinetischer und potentieller) und Potential an.
- Welcher Term des Wechselwirkungspotentials ist für die thermische Ausdehnung verantwortlich?
- Nennen sie einige Beispiele, wo die thermische Ausdehnung von Stoffen bewußt ausgenutzt wird. Wieso werden Keramikherdplatten aus β -Eukryptit gefertigt?