3-3 / 1 Quantenmechanischer Messprozess

Mathematische Beschreibung des Messprozesses

Repräsentation physikalischer Messgrößen durch Operatoren A:

- Quantenobjekte besitzen die (wohldefinierte) physikalische Eigenschaft A, wenn Eigenwertgleichung erfüllt ist:

$$A\Psi = a\Psi$$

Der Eigenwert a ist dann der Messwert.

- Ist Eigenwertgleichung durch Ψ nicht erfüllt
$\rightarrow$ Wert der Messgröße A nicht wohldefiniert:
Eine einzelne Messung liefert dann einen der möglichen Eigenwerte a_n mit der Wahrscheinlichkeit $|c_n|^2$ wobei gilt

$$\Psi = \sum_n c_n \Psi_n \ ; \quad \Psi_n \text{ Eigenfktn.}$$

- nach Messung befindet sich Ψ im Eigenzustand zum Messwert a
$\rightarrow$ Zustandsreduktion („Kollaps der Wellenfunktion“)

3-3 / 2 Quantenmechanischer Messprozess

Wiederholte Messung der durch den Operator A repräsentierten physikalischen Größe an einem Teilchens, das sich in einem definierten Quantenzustand Ψ befindet, ergibt den Erwartungswert <A>:

- Ψ normiert: $$\langle A\rangle = \int \Psi^* A\Psi dx$$
- Ψ nicht normiert: $$\langle A\rangle = \frac{\int \Psi^* A\Psi dx}{\int \Psi^* \Psi dx}$$

- Ψ Eigenfunktion: $\langle A \rangle = a_n$ Eigenwert (scharf definiert)
- Ψ keine Eigenfunktion : $\Psi = \sum_n c_n \Psi_n \ ; \quad \Psi_n$ Eigenfunktionen

$$\langle A\rangle = \sum |c_n|^2 a_n$$

3-3 / 3 Wichtige quantenmechanische Operatoren

Klassische Größe	Operator	Erwartungswert
• Ort	x	$\langle x \rangle = \int \Psi^*(x,t) \cdot x \cdot \Psi(x,t) dx$
	$\vec{r}$	$\langle \vec{r} \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t) \cdot \vec{r} \cdot \Psi(\vec{r},t) d\vec{r}$
• Impuls p_x	$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$	$\langle p_x \rangle = \int \Psi^*(x,t) \cdot \frac{\hbar}{i} \left(\frac{d}{dx} \Psi(x,t) \right) dx$
$\vec{p}$	$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$	$\langle \vec{p} \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t) \cdot \frac{\hbar}{i} \left(\vec{\nabla} \Psi(\vec{r},t) \right) d\vec{r}$
• Energie E	$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$	$\langle E \rangle = \int \Psi^*(x,t) \cdot \left(H \Psi(x,t) \right) dx$
	$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Box + V(\vec{r})$	$\langle E \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t) \cdot \left(H \Psi(\vec{r},t) \right) d\vec{r}$
• Drehimpuls	$\vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$	$\langle \vec{l} \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t) \cdot \left(\left[\vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \right] \Psi(\vec{r},t) \right) d\vec{r}$

3-3 / 4 CT Messbarkeit

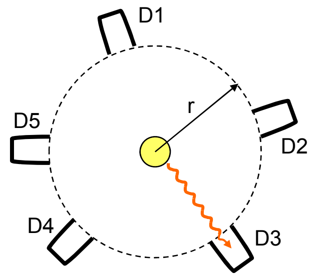
Wie viele Messungen der Messgröße A sind mindestens notwendig um nachzuweisen, dass ein Teilchen nicht in einem stationären Zustand (bez. A) ist?

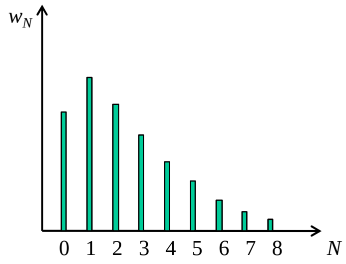
1. eine
2. zwei
3. einige Tausend
4. unendlich viele

3-3 / 5 Messungen an einzelnen Quantenobjekten

1-Photonen Versuche:

- Detektion einzelner, statistisch verteilter Photonen: Zählereignisse in Zeitintervall Δt
  - Mittelwert $\bar{N}$
  - N poissonverteilt $\rightarrow$ diskrete statistische Ereignisse
  - Standardabweichung $= \sqrt{\bar{N}}$
  - Schwankung: $\Delta N / \bar{N} \propto \bar{N}^{-1/2} \xrightarrow{N \to \infty} 0$





3-3 / 6 Messungen an einzelnen Quantenobjekten

1-Photonen Versuche:

- Interferenz am Doppelspalt