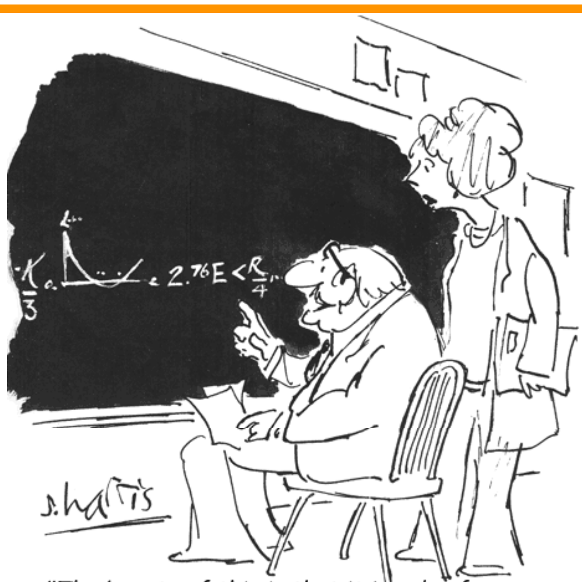
3-6 / 1 Gebundene Zustände



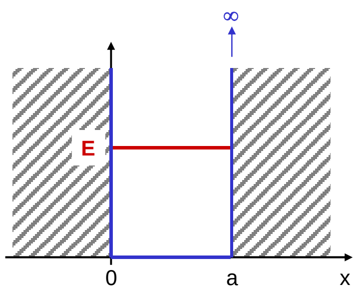
"The beauty of this is that it is only of theoretical importance, and there is no way it can be of any practical use whatsoever."

3-6 / 2 Gebundene Zustände

Lokalisierung von Quantenteilchen in Potentialminima
→ gebundene Zustände, z.B.:

- Elektronen in Atomen, Molekülen, Festkörpern
- Elektronen in künstlichen Halbleiterstrukturen („Quantentröge“)
- Protonen/ Neutronen im Atomkern

Einfachste Realisierung: Kastenpotential



3-1 / 3 Kasten mit unendlich hohen Wänden

Teilchen kann sich nur im Bereich 0 < x < a aufhalten

→ erlaubte Lösung der zeitunabh. Schrödingergl. sind stehende Wellen

- erlaubte Energien der stationären Zustände („Energieeigenwerte“):

  $E_n = E_1 \cdot n^2; \quad n = 1, 2, \ldots;$ Grundzustandsenergie $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2}$

- Wellenfunktionen:

  $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$

  - normiert: $\int \Psi_n^* \Psi_n dx = 1$
  - orthogonal: $\int \Psi_n^* \Psi_m dx = 0 \quad für \quad n \neq m$

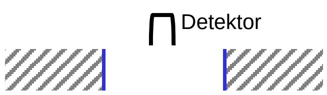
3-6 / 4 CT Kastenpotential

Sie spielen mit einem Kollegen eine physikalische Variante des Spiels „Kopf oder Zahl“ nach folgenden Spielregeln:

Verglichen wird ein Elektron, dass sich in einem eindimensionalen Kastenpotential im Grundzustand befindet, mit einem Proton der gleichen kinetischen Energie in einem identischen Kastenpotential. Beide Teilchen sollen mit Detektoren nachgewiesen werden, die sich jeweils ca. in der Mitte des Kastens befinden. Jeder Spieler setzt auf ein Teilchen, Wird Ihr Teilchen im Detektor beobachtet, das andere Teilchen aber nicht, haben Sie gewonnen (beide Teilchen beobachtet = unentschieden).

Auf welches Teilchen setzen Sie?

1. das Elektron
2. das Proton
3. ist eigentlich egal



3-6 / 5 CT Kastenpotential 2

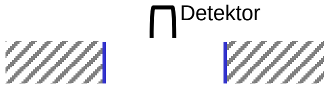
Mit einem kleinen Trick können Sie das Spiel so verändern, dass es günstiger ist, das Proton zu wählen. Sie müssen dazu nur die Teilchenenergien:

1. halbieren
2. verdoppeln
3. vervierfachen
4. verzehnfachen

3-6 / 6 CT Kastenpotential 3

Mit welche Maßnahme könnten Sie das Spiel so verändern, dass die Chancen für beide Spieler etwa gleich sind (Mehrfachnennungen möglich)?

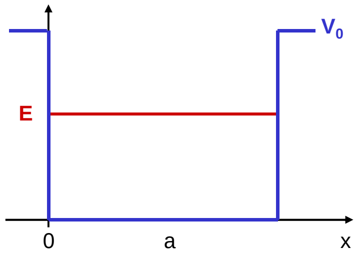
1. Energie beider Teilchen leicht erhöhen
2. Energie beider Teilchen stark erhöhen
3. Ausmaße des Kasten stark vergrößern
4. Ausmaße des Kasten stark verkleinern
5. Detektoren am Rand der Kästen positionieren
6. nicht von alledem schafft gleiche Chancen

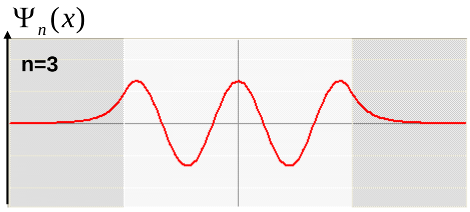


3-6 / 7 Kastenpotential

Kastenpotential mit endlich hohen Wänden:

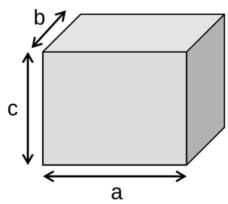
- Teilchen kann etwas in Bereich außerhalb Kasten eindringen
  $\rightarrow$ Wellenfunktion fällt dort exponentiell ab
- Energieeigenwerte etwas kleiner als für unendlich hohe Wände





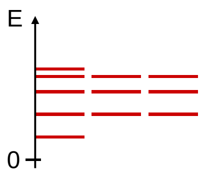
3-6 / 8 Dreidimensionaler Kasten

Stationäre Zustände sind stehende Wellen in allen 3 Raumrichtungen



- Energieeigenwerte:
  $$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\cdot\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right); \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \ldots;$$
- Wellenfunktionen:
  $$\Psi_n(x,y,z) = C\cdot\sin\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cdot\sin\left(\frac{n_z\pi}{c}z\right)$$
- Würfel:
  $$E_n = E_1\cdot(n_x^2+n_y^2+n_z^2); \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \ldots; \quad E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}$$

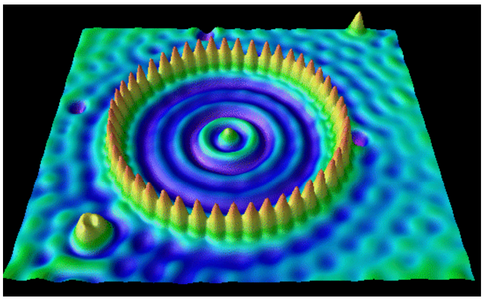
E_n / E_1	(n_x, n_y, n_z)	Entartung
3	(1,1,1)	1
6	(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)	3
9	(2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)	3
11	(3,1,1), (1,3,1), (1,1,3)	3
12	(2,2,2)	1



3-6 / 9 Zweidimensionaler Kasten

Beobachtung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit von in „Quantentrögen“ gebundenen Elektronen mittels STM

Kreisförmiger Quantentrog
(Mn Atome auf Silber)

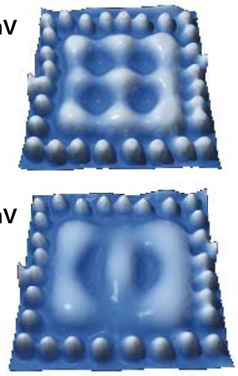


F.C. Crommie, et al., *Science* 263, 218 (1999)

Quadratischer Quantentrog
(Mn Atome auf Silber)

50 mV

10 mV



AG Berndt

3-6 / 10 Zeitabhängige Lösungen für 1D Kasten

Lösungen der zeitabh. Schrödingergl.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,t)+V(x)\cdot\Psi(x,t)=ih\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

- stehende Wellen (Orts- und Zeitkoordinaten separierbar):

$$\Psi_n(x,t)=\Psi_n(x)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E\cdot t}=C\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E\cdot t}$$

- allgemeine Lösung:

$$\Psi(x,t)=\sum_n c_n\Psi_n(x)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E\cdot t}$$

3-6 / 11 Überlagerung von Zuständen

Superposition zweier stationärer Zustände:

$$\Psi = c_1 \Psi_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 \cdot t} + c_2 \Psi_2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 \cdot t}$$

$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|\Psi(x,t)|^2 = |c_1\Psi_1|^2 + |c_2\Psi_2|^2 + \underbrace{c_1 c_2^* \Psi_1 \Psi_2^* e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)\cdot t} + c_2 c_1^* \Psi_2 \Psi_1^* e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)\cdot t}}_{\text{Oszillation mit } \omega = (E_1 - E_2)/\hbar}$$

$\rightarrow$ (nicht stationäre) zeitabhängige Lösung,
entspricht (für geladenes Teilchen) Dipolschwingung

Superposition vieler Zustände zu Wellenpaket:

http://www.phys.psu.edu/~rick/QM/qm.html

3-6 / 12 Gebundene und nicht gebundene Zustände