

3-8 / 1 Rotation in zwei Dimensionen

Eigenzustände:

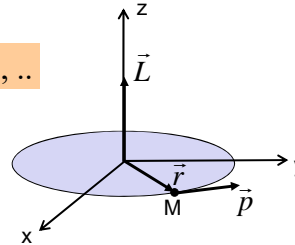
- beschrieben durch Quantenzahl $m = 0, 1, 2, \dots$

- Rotationsenergie: $H\psi_m = \frac{\hbar^2}{2I} m^2 \psi_m$

mit Trägheitsmoment $I \equiv Mr^2$

- Drehimpuls: $L_z \psi_m = m\hbar \psi_m$

- Eigenfunktionen: $\psi_m(\varphi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{im\varphi}$



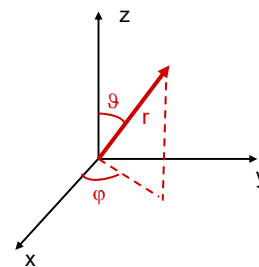
3-8 / 2 Kugelkoordinaten

Transformation kartesische Koordinaten - Kugelkoordinaten:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\vartheta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$



Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{(r \sin \vartheta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

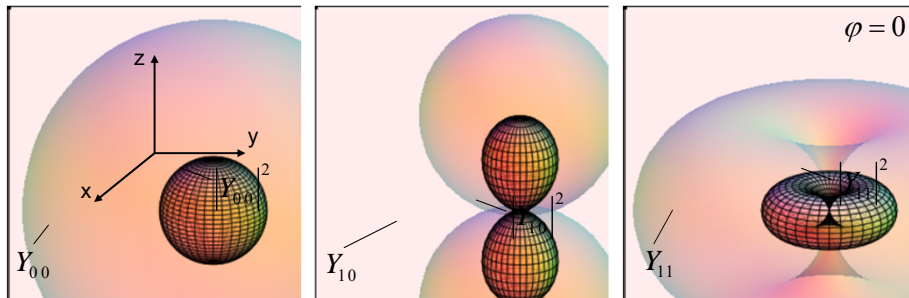
3-8 / 3

Kugelflächenfunktionen

Eigenzustände für $l = 0$: $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

Eigenzustände für $l = 1$: $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \cos \vartheta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{z}{r}$

$$Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin \vartheta \cdot e^{\pm i\varphi} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \frac{x \pm iy}{r}$$



A.V. Tikhonenko, Visual Quantum Mechanics, Mathcad Electronic Book (2002)
<http://www.mathcad.com/library/ebooks/visqm.asp>

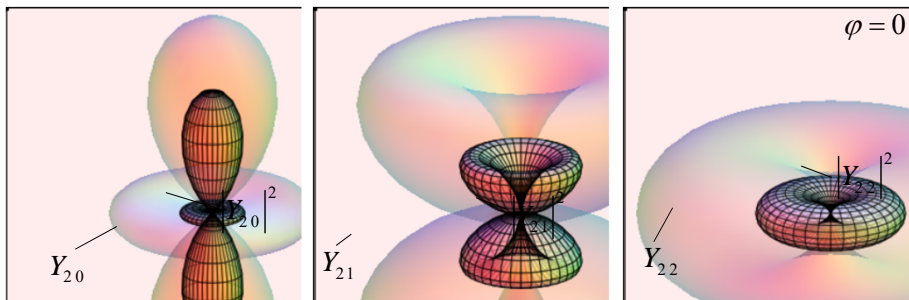
3-8 / 4

Kugelflächenfunktionen

Eigenzustände für $l = 2$: $Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) = \mp \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \cdot \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}$

$$Y_{2\pm 1} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot e^{\pm i\varphi} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \left(\frac{x \pm iy}{r} \right)^2$$

$$Y_{2\pm 2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot e^{\pm 2i\varphi} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot \frac{(x \pm iy)z}{r^2}$$



A.V. Tikhonenko, Visual Quantum Mechanics, Mathcad Electronic Book (2002)
<http://www.mathcad.com/library/ebooks/visqm.asp>

Drehimpuls-Operator:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla};$$

$$L_x = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad L_y = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right); \quad L_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$L_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right);$$

$$L_y = i\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right);$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{(\sin \vartheta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Eigenzustände:

- beschrieben durch:

Drehimpulsquantenzahl $l = 0, 1, 2, \dots$

magnetische Quantenzahl $m = l, l-1, \dots, -l$

- Eigenwert der Rotationsenergie: $E = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I}$

mit Trägheitsmoment $I \equiv Mr^2$

- Eigenwerte des Drehimpulses:

- Betrag: $L^2 = l(l+1)\hbar^2$ bzw. $|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$

- z-Komponente: $L_z = m\hbar$

- Eigenfunktionen sind die Kugelflächenfunktionen :

$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = N \cdot e^{im\varphi} \cdot P_l^m(\cos \vartheta)$; $P_l^0 \equiv$ Legendre Polynome

$Y_{l-l} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{\sqrt{(2l+1)!}}{l!2^l} \cdot e^{im\varphi} \cdot (\sin \vartheta)^l$

$Y_{l\ m+1} = \frac{1}{\sqrt{(l-m)(l+m+1)}} e^{im\varphi} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} - m \cot \vartheta \right] Y_{lm}$

Eigenschaften des Drehimpuls-Operators:

- Vertauschungsrelationen:

$$L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z$$

$$L_y L_z - L_z L_y = i\hbar L_x$$

$$L_z L_x - L_x L_z = i\hbar L_y$$

$$L_j L^2 - L^2 L_j = 0; \quad j = x, y, z$$

- Komponenten des Drehimpulsvektors nicht gleichzeitig messbar
- Quadrat des Drehimpulses (Länge) und eine Komponente (üblicherweise als z-Richtung definiert) gleichzeitig messbar
- Drehimpulsvektor liegt in Kegelfläche

