Physik der Materie I, WS 2018/2019 - Übungsblatt 3

Übungstermin: 21.11.2018

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Wellenpacket der allgemeinen Form:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{i(kx-\omega(k)\cdot t)} dk$$

Dabei sind die Koeffizienten $A(k) \in \mathbb{R}$ Amplituden der einzelnen ebenen Wellen, für die jeweils die Dispersionsrelation $\omega(k) = \frac{\hbar}{2m} k^2$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass dieses Wellenpaket die zeitabhängige Schrödingergleichung für freie Teilchen (d.h. für $V(x) = 0$) erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte für jede einzelne ebene Welle $\varphi(x,t) = A \cdot e^{i(kx-\omega(k)\cdot t)}$ mit der gleichen Dispersionsrelation unabhängig von der Zeit ist.

c) Zeigen Sie, dass bei Überlagerung zweier solcher ebener Wellen mit verschiedenen Amplituden (A_1, A_2) und Wellenvektoren (k_1, k_2) gilt: $\int |\varphi_1 + \varphi_2|^2 \, dx = \int |\varphi_1|^2 \, dx + \int |\varphi_2|^2 \, dx$

d) Argumentieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus b) und c) qualitativ, warum das Wellenpacket bei Ausbreitung durch den Raum normalisiert bleibt.

Aufgabe 2

Ein Elektron, dass sich entlang der x Achse frei durch einen feldfreien Raum bewegt, kann durch folgendes gaussförmige Wellenpacket beschrieben werden:

$$\psi(x,t) = N \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2\sigma_k^2}} \cdot e^{i(kx - \frac{\hbar}{2m}k^2 \cdot t)} dk$$

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N zum Zeitpunkt $t = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die Relation $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-az^2-bz} dz = \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2} dz$

(quadratische Ergänzung) und nutzen Sie aus, dass das rechte Integral durch Koordinatentransformation auf die Gaussfunktion zurückgeführt werden kann.

b) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für $\psi(x,t)$ bei Zeiten $t > 0$ an.

c) Wie ändert sich die „Unschärfe“ der Teilchenposition mit der Zeit?