Thema: Verhalten strömender Fluide (Flüssigkeiten, Gase)

Annahme:
Homogenes Medium mit beweglichen mikroskopischen Volumenelementen

Flüssigkeiten: (annähernd) inkompressibel, Dichte $\rho_{fl} \approx$ konst.
Gase: kompressibel, Dichte $\rho_g << \rho_{fl}$, bestimmt durch Gasgesetz

Themen:

- Typen von Strömungen
- Quantitative Beschreibung des Strömungsfelds
- Druck in strömenden Fluiden
- Reibungskräfte in Fluiden

Kräfte auf Volumenelement ΔV des Fluids:

•Räumliche Variation im Druck: $\vec{F}_p = -\vec{\nabla} p \cdot \Delta V$

•Schwerkraft: $\vec{F}_g = \Delta m \cdot \vec{g} = \Delta V \cdot \rho \cdot \vec{g}$

•Reibungskräfte $\vec{F}_R$ bei räumlicher Variation in Fließgeschwindigkeit. Abhängig von Zähigkeit (Viskosität η) des Fluids.

Für ideale Flüssigkeiten ist $\eta = 0$.

$\rightarrow$ Newtonsche Bewegungsgleichung für Masseelement $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$:

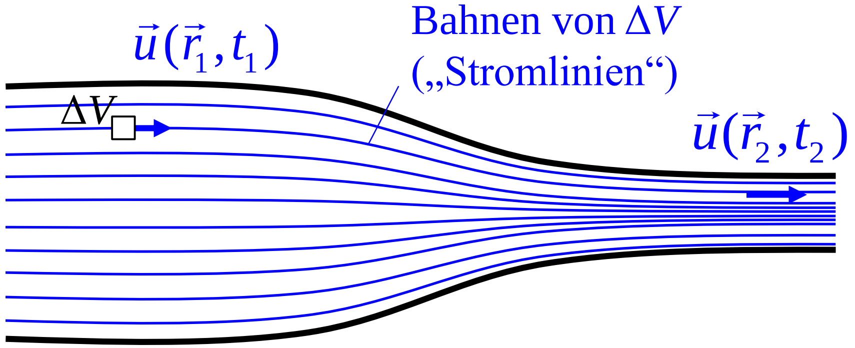
$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_R = \Delta m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \Delta V \cdot \rho \cdot \frac{d}{dt}\vec{u}$$

wobei $\vec{u}$ die Strömungsgeschwindigkeit ist.

Ist das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(\vec{r})$ = zeitlich konstant spricht man von stationärer Strömung.

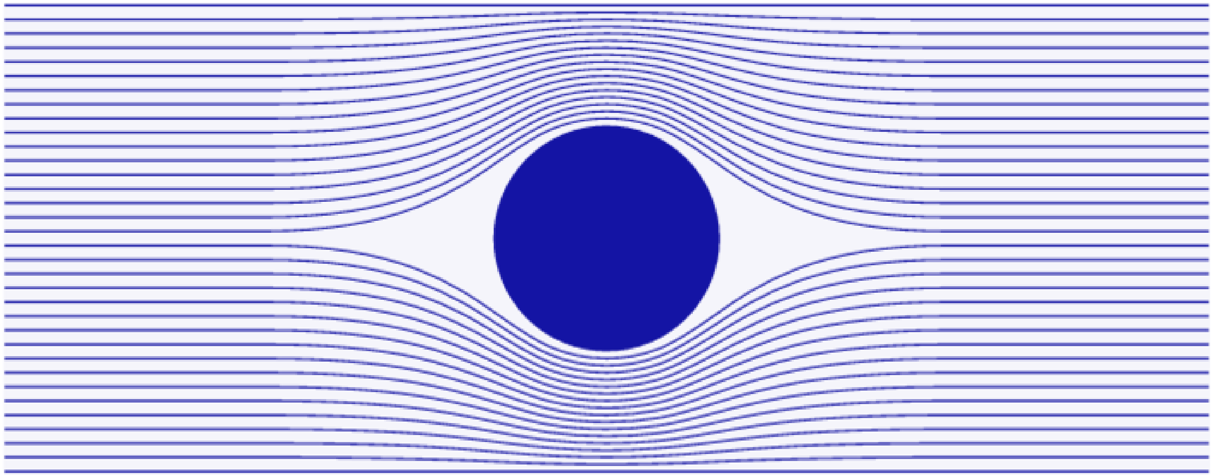
In diesem Fall ist die Bahn von ΔV

$\vec{r}(t) \parallel \vec{u}(\vec{r})$

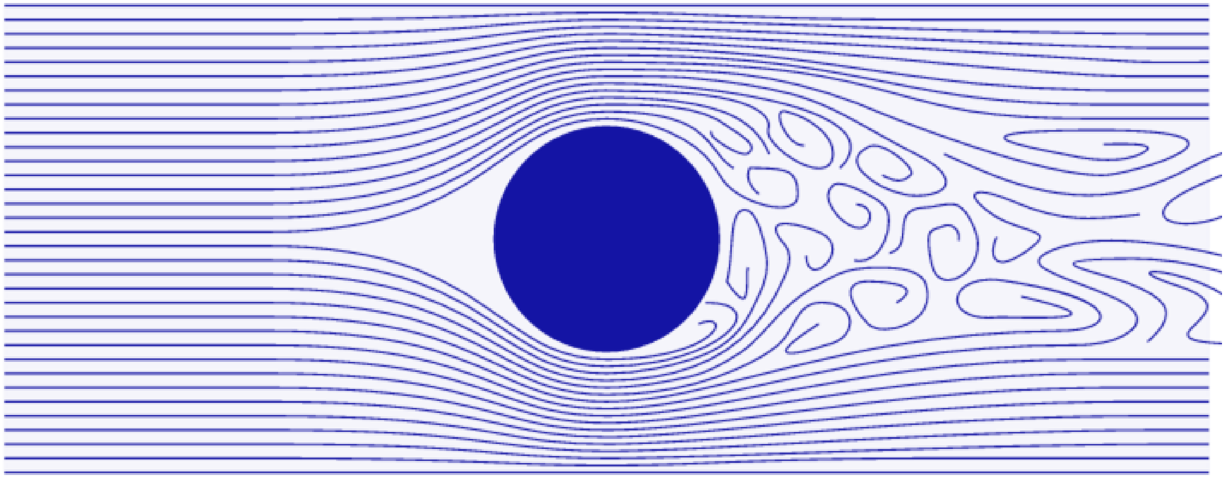


Strömungstypen

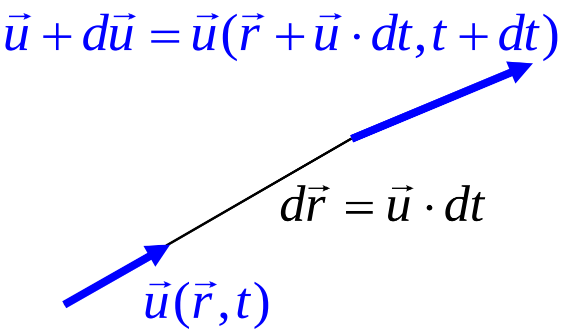
Laminare Strömung: parallele Stromlinien



Turbulente Strömung: Verwirbelung der Stromlinien



Euler-Gleichung



Die substantielle Beschleunigung ist die totale Änderung der Geschwindigkeit eines Flüssigkeits-elements aufgrund:

1. Zeitlicher Änderung von $\vec{u}$ am gleichen Ort (nur bei nichtstationären Strömungen)
2. Änderungen aufgrund der Ortsabhängigkeit von $\vec{u}$

Für die x Komponente von $\vec{u}$ (und analog y und z Komponente) gilt dann:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z$$

Die Gleichungen für die 3 Komponenten lassen sich zusammenfassen als:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}u_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot grad\right)\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}}_{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u}}$$

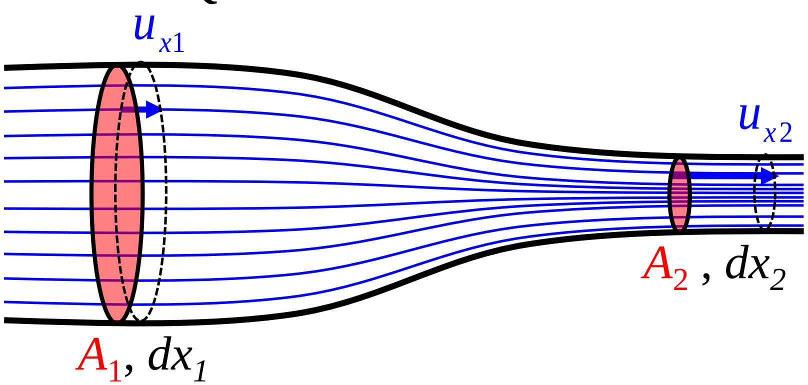
$$\vec{\nabla}\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$ ist der Vektorgradient des Geschwindigkeitsfeldes

Ideale Flüssigkeit: $$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$; **Eulergleichung**

Kontinuitätsgleichung

Strömung einer Flüssigkeit durch Röhre mit variablem Querschnitt A:

Für den Massenfluss durch die Fläche A gilt:



$$\frac{dM}{dt} = \rho A_1 u_{x1} = \rho A_2 u_{x2}$$

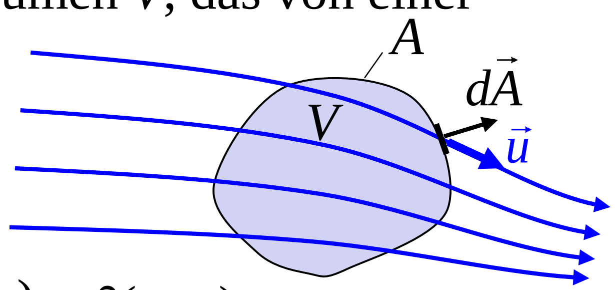
Inkompressible Flüssigkeiten (ρ = konst.):

$$\frac{u_{x1}}{u_{x2}} = \frac{A_2}{A_1}$$

Der Massenfluss pro (senkrecht dazu stehende) Flächeneinheit ist die Massenflussdichte $\vec{j} = \rho \vec{u}$

Der Massenfluss durch eine Fläche A ist damit $\frac{dM}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{A}\,; \quad \vec{A} = A \cdot \vec{e}_A$

Allgemein gilt für ein beliebig geformtes Flüssigkeitsvolumen V, das von einer Oberfläche A umschlossen ist:



$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = -\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\int_A \rho\, \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

$\rightarrow$ **Kontinuitätsgleichung**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\, \vec{u}) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\, \vec{u}) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

Inkompressible Flüssigkeiten: $div(\vec{u}) = 0$

Bernoulli-Gleichung

Für eine ideale Flüssigkeit bleibt die Gesamtenergie eines durch ein Rohr strömenden Volumenelements erhalten:

$$p_1 \cdot V_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot V_1 + \tfrac{1}{2}\rho \cdot u_1^2 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot V_2 + \tfrac{1}{2}\rho \cdot u_2^2 \cdot V_2 = konst.$$

Dabei ist $h_{1,2}$ die Höhe und $u_{1,2}$ die Strömungsgeschwindigkeit an den Orten 1 und 2.

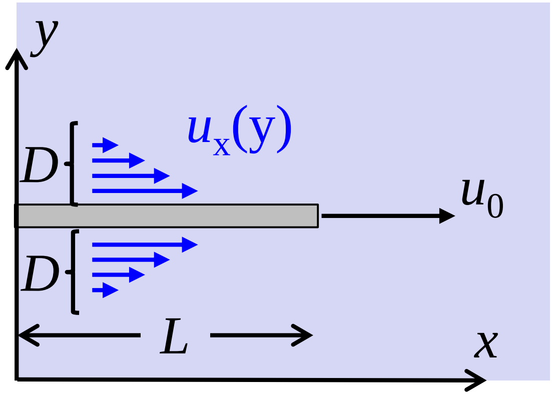
Für inkompressible Flüssigkeiten ist $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ und es gilt die Erhaltung des Gesamtdrucks p_0, bestehen aus (**Bernoulli-Gleichung**):

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \tfrac{1}{2}\rho \cdot u_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \tfrac{1}{2}\rho \cdot u_2^2 = p_0 = konst.$$

$p_1 \equiv$ statischer Druck
$\rho \cdot g \cdot h \equiv$ hydrostatischer Druck
$\frac{1}{2}\,\rho \cdot u^2 \equiv$ Staudruck

Laminare Strömungen

Auf eine Platte, die sich durch die Flüssigkeit bewegt, wirkt pro Fläche A eine Reibungskraft, die proportional zum räumliche Abfall der induzierten Geschwindigkeit ist:



$$\frac{F_R}{A} = -\eta \left| \frac{du_x}{dy} \right|$$

$\eta \equiv$ dynamische Zähigkeit bzw. Viskosität, $[\eta] = 1\ \mathrm{N\ s\ m^{-2}}$

η / 10^{-3} N s m^{-2}	0°C	20°C	40°C
Wasser	1,792	1,002	0,653
Glyzerin	12100	1480	238

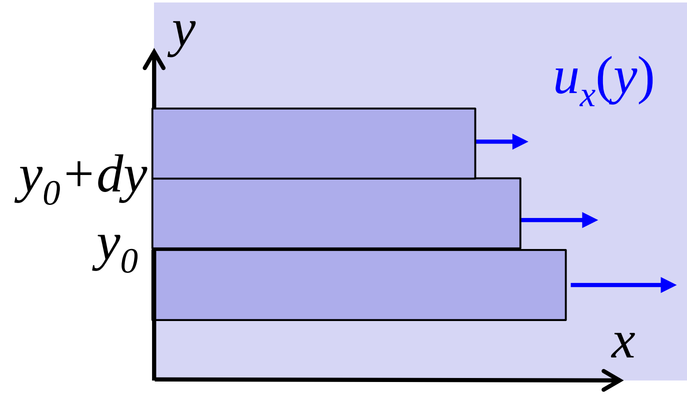
Aufgrund der Viskosität wird in einer Grenzschicht der Dicke $D \approx \sqrt{\dfrac{\eta L}{\rho u_0}}$

Flüssigkeit von der Platte mitgezogen. In dieser Grenzschicht fällt die Geschwindigkeit kontinuierlich auf Null ab.

Laminare Strömungen

Die Reibungskraft, die auf ein Volumenelement dV der Flüssigkeit wirkt, das sich in x-Richtung bewegt, ist gegeben durch:

$$dF_{R,x} = \eta \cdot dV \cdot \Delta u_x = \eta \cdot dV \cdot \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$



Für beliebige Strömungsrichtung $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ gilt:

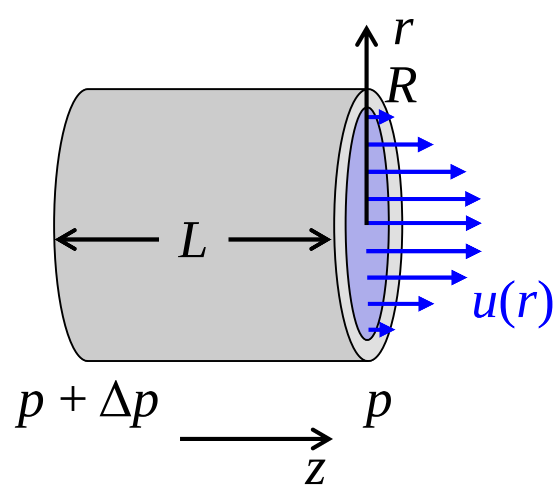
$$d\vec{F}_R = \eta \cdot dV \cdot \Delta \vec{u}$$ bzw. für ein makroskopisches Volumen V: $$\vec{F}_R = \eta \cdot \int_V \Delta \vec{u}\; dV$$

Eine Strömung, die aufgrund einer Druckdifferenz Δp durch ein Rohr der Länge L und des Radius R fließt, besitzt ein paraboloides Geschwindigkeitsprofil:

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot (R^2 - r^2)$$

Der Fluss durch dieses Rohr ist durch das Hagen-Poiseulle Gesetz gegeben:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$$



Navier-Stokes Gleichung

Durch Ergänzung der Euler Gleichung um die Reibungskraft erhält man die allgemeine Bewegungsgleichung eines Volumenelements *dV* des Fluids, die als die Navier-Stokes Gleichung bezeichnet wird:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right]=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\eta\,\Delta\vec{u}$$

Der Term $\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$ kann auch geschrieben werden als:

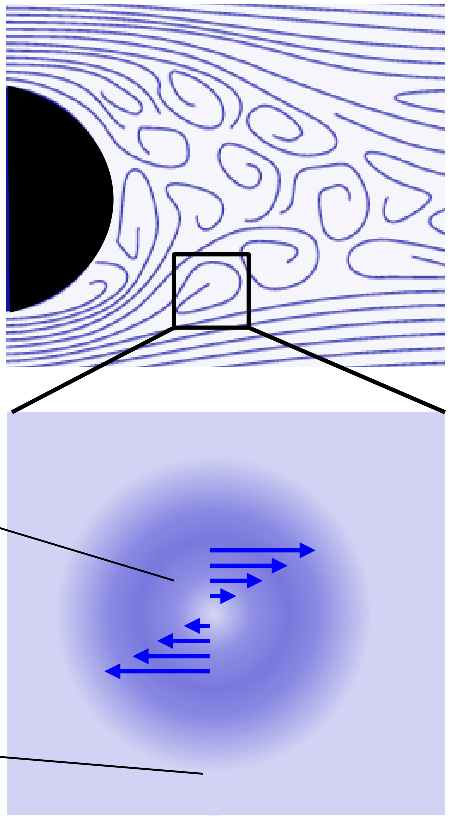
$$\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\equiv\tfrac{1}{2}\,grad\,(u^2)-\vec{u}\times rot\;\vec{u}$$

Dabei ist die Rotation von $\vec{u}$ definiert als:

$$rot\;\vec{u}\equiv\vec{\nabla}\times\vec{u}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_z}{\partial y}-\dfrac{\partial u_y}{\partial z}\\[2ex]\dfrac{\partial u_x}{\partial z}-\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial u_y}{\partial x}-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Strömungswirbel

Bei hinreichend hoher Geschwindigkeit bilden sich hinter umströmten Hindernissen Wirbel aus.



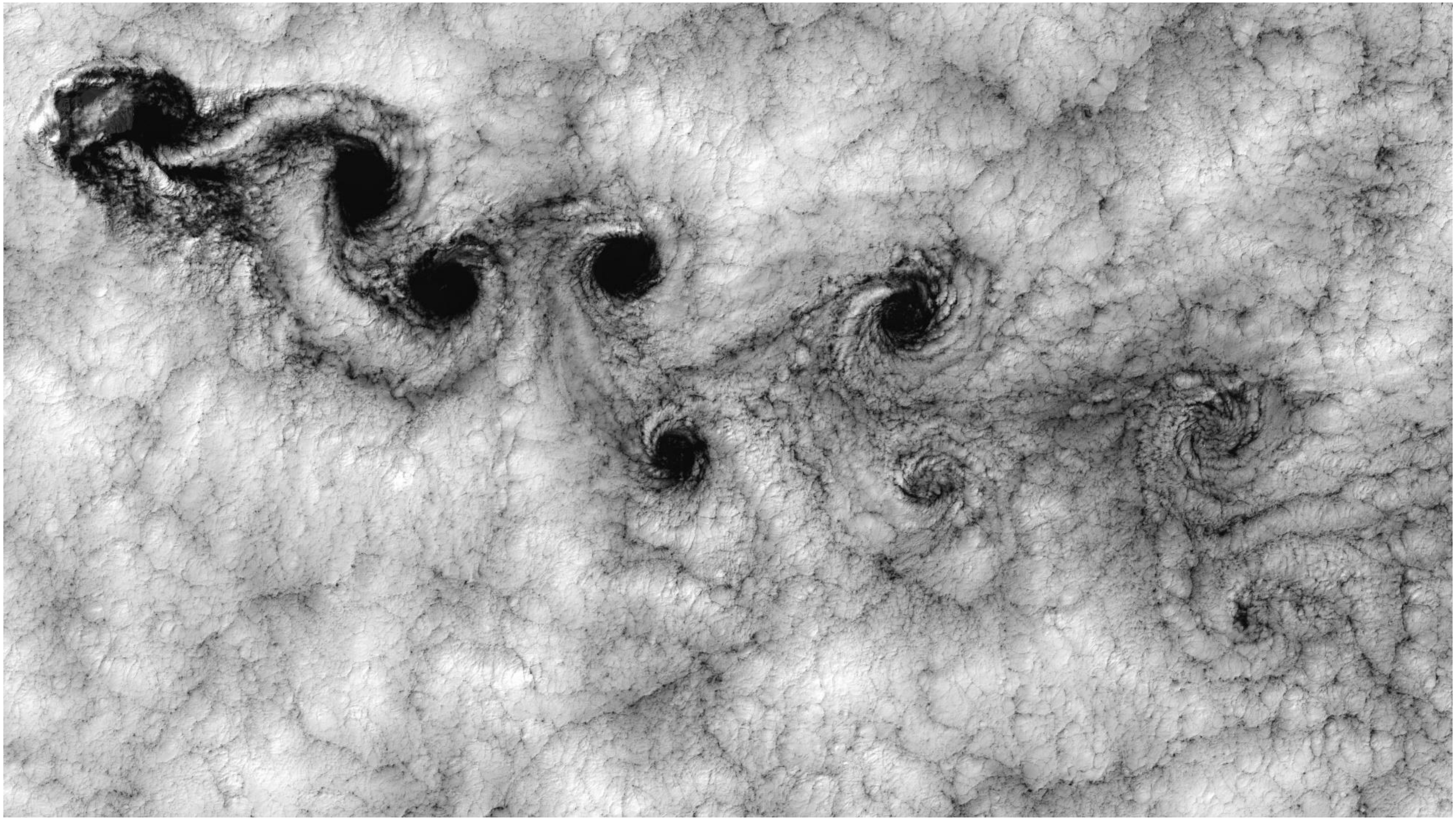
Wirbelkern:
Starre Rotation der Flüssigkeitsscheibe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω: $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Hier gilt: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\, \vec{u}$

Zirkulationsströmung:
$|\vec{u}|$ nimmt mit Abstand vom Kern ab

Wirbel bewegen sich, Größe und Richtung von $\vec{\omega}$ ändern sich zeitlich.

Ideale Flüssigkeit:
Wirbel können weder entstehen noch abgebaut werden
$\rightarrow$ Ist die Flüssigkeit anfänglich wirbelfrei, bleibt sie das auch.
Masse und Drehimpuls eines Wirbels bleiben erhalten.

Wirbelstrasse



Die Kármánsche Wirbelstraße ist ein Phänomen, bei dem sich hinter einem umströmten Körper gegenläufige Wirbel bilden. Auf der Satellitenaufnahme sind Wirbel hinter den Juan-Fernández-Inseln zu erkennen (NASA GSFC).

https://www.dlr.de/content/de/bilder/2016/2/k-rm-nsche-wirbelstrasse_23388.html

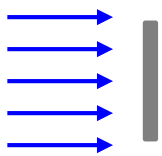
Umströmte Körper

Strömungswiderstand:
Auf Körper der Querschnittsfläche A in einer Strömung wirkt eine Kraft

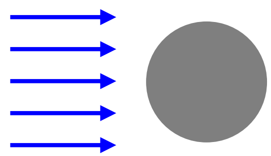
$$F_W = \tfrac{1}{2}\rho u^2 \cdot c_W A$$

Der Widerstandswert c_W ist abhängig vom Strömungsprofil

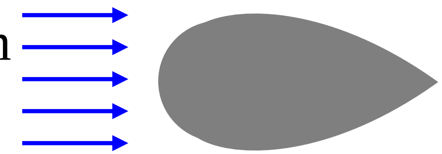
Scheibe
$c_W = 1.2$



Kugel
$c_W = 0.4$



Stromlinienform
$c_W = 0.06$



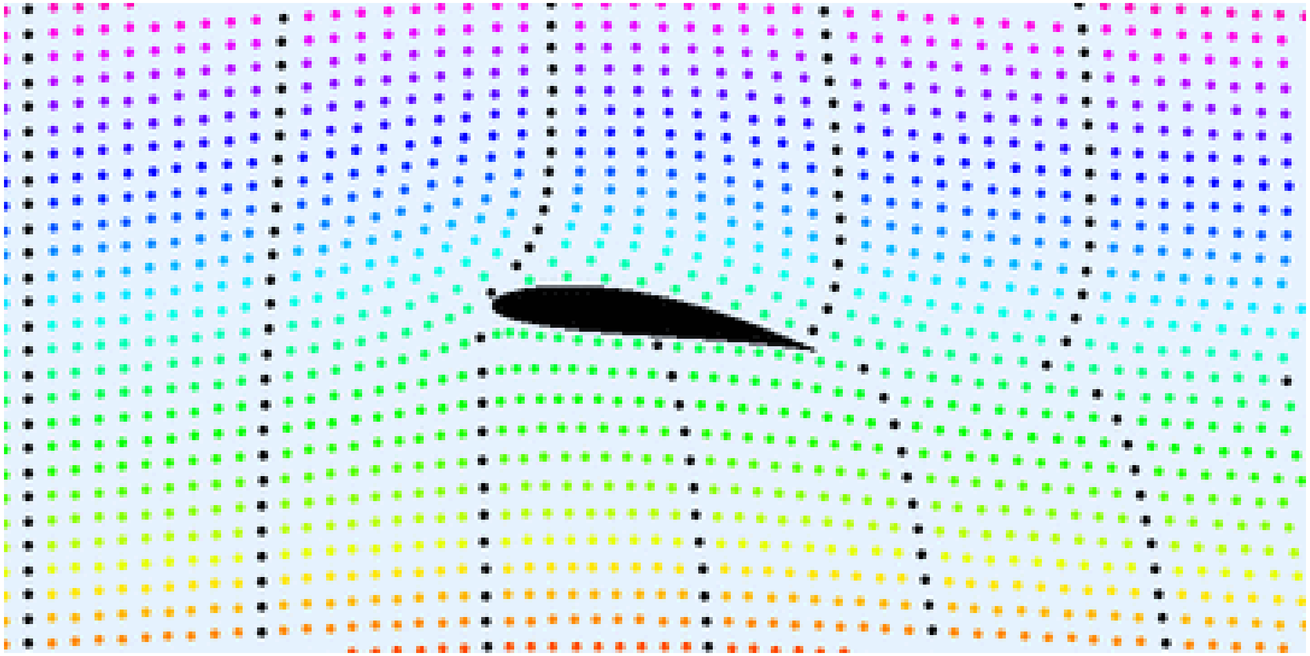
Dynamischer Auftrieb:
Auf asymmetrische Körper oder Körper, die in einem Anstellwinkel zur Strömungsrichtung stehen, wirkt eine vertikale Kraft:

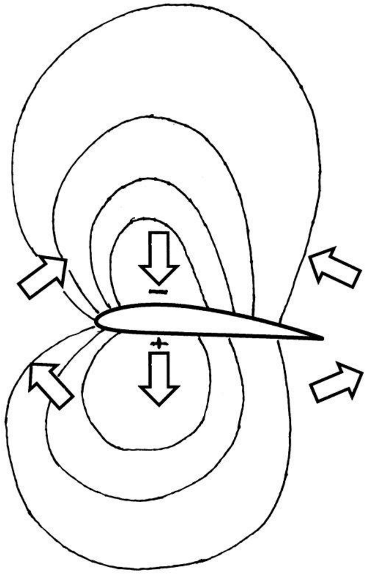
$$F_A = \tfrac{1}{2}\rho u^2 \cdot c_A A$$

Der Widerstandswert c_W ist abhängig vom Strömungsprofil

Strömung um Tragfläche

Geschwindigkeitsfeld und Druckverteilung





https://en.wikipedia.org/wiki/Lift_(force)