

Thema: Verhalten ruhender idealer Flüssigkeiten

Eine ideale Flüssigkeit hat einen Schubmodul $G = 0$

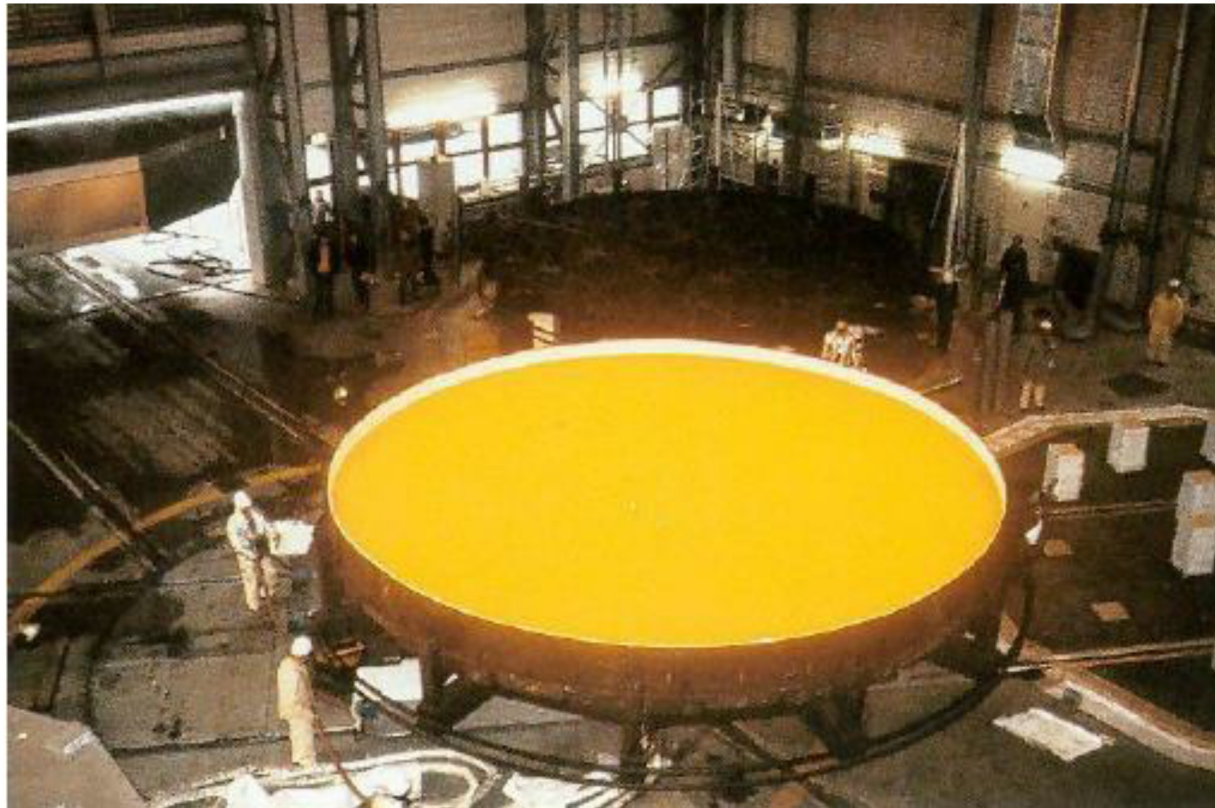
Themen:

- Kräfte und Drücke in Flüssigkeiten
- Auftrieb und Schwimmen von Körpern
- Flüssigkeitsoberflächen, Oberflächenspannung



Wegen $G = 0$ können an Flüssigkeitsoberflächen keine Tangentialkräfte auftreten
→ Flüssigkeitsoberfläche ist senkrecht zur wirkenden Kraft

Anwendung: Herstellung von Parabolspiegeln



T. Döhning et al., in: Advanced Optical and Mechanical Technologies in Telescopes and Instrumentation, E. Atad-Ettinger, D. Lemke (Ed.), Proc. of SPIE Vol. 7018, 70183B (2008)

Statischer Druck

Wirkender Druck an Oberfläche/Grenzfläche der Flüssigkeit:

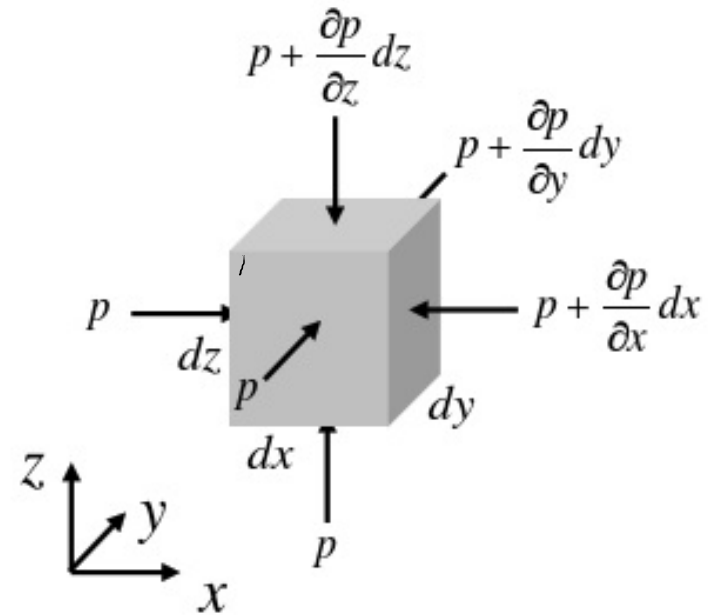
$$p \equiv \frac{|\vec{F}_n|}{A} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$p(x_0 + \Delta x) = p(x_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=x_0} \cdot \Delta x + \dots$$

$$\begin{aligned} dF_x &= p \cdot dz \, dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) dz \, dy \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \, dy \, dz = - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dV \end{aligned}$$

$$dF_y = - \frac{\partial p}{\partial y} dV ; \quad dF_z = - \frac{\partial p}{\partial z} dV$$

$$d\vec{F} = - \text{grad } p \, dV = - \vec{\nabla} p \cdot dV$$



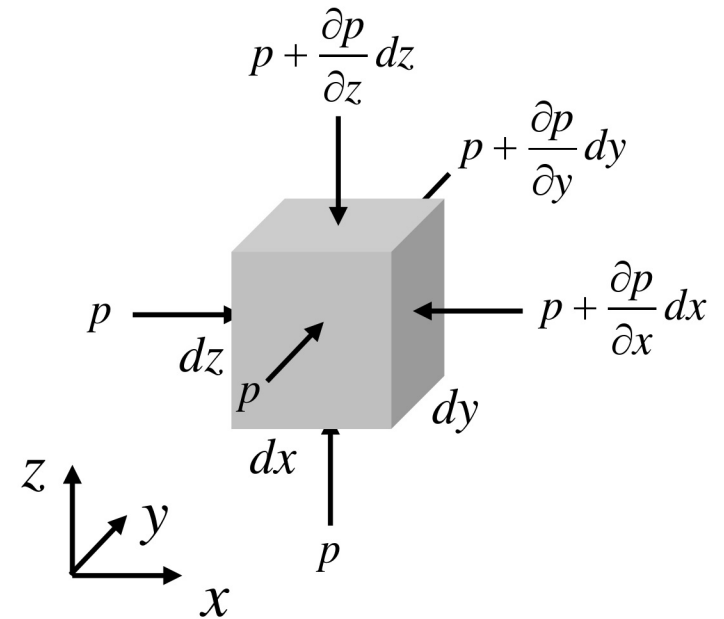
Wirkender **Druck an Oberfläche/Grenzfläche** der Flüssigkeit: $p \equiv \frac{|\vec{F}_n|}{A}$

Druck im Innern einer Flüssigkeit:

Betrachte Volumenelement $dV \equiv dx \cdot dy \cdot dz$

→ Kraft auf dV ist:

$$d\vec{F} = -\vec{\nabla}p \cdot dV = - \begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix} \cdot dV$$



Ruhendes Volumenelement ($d\vec{F} = 0$):

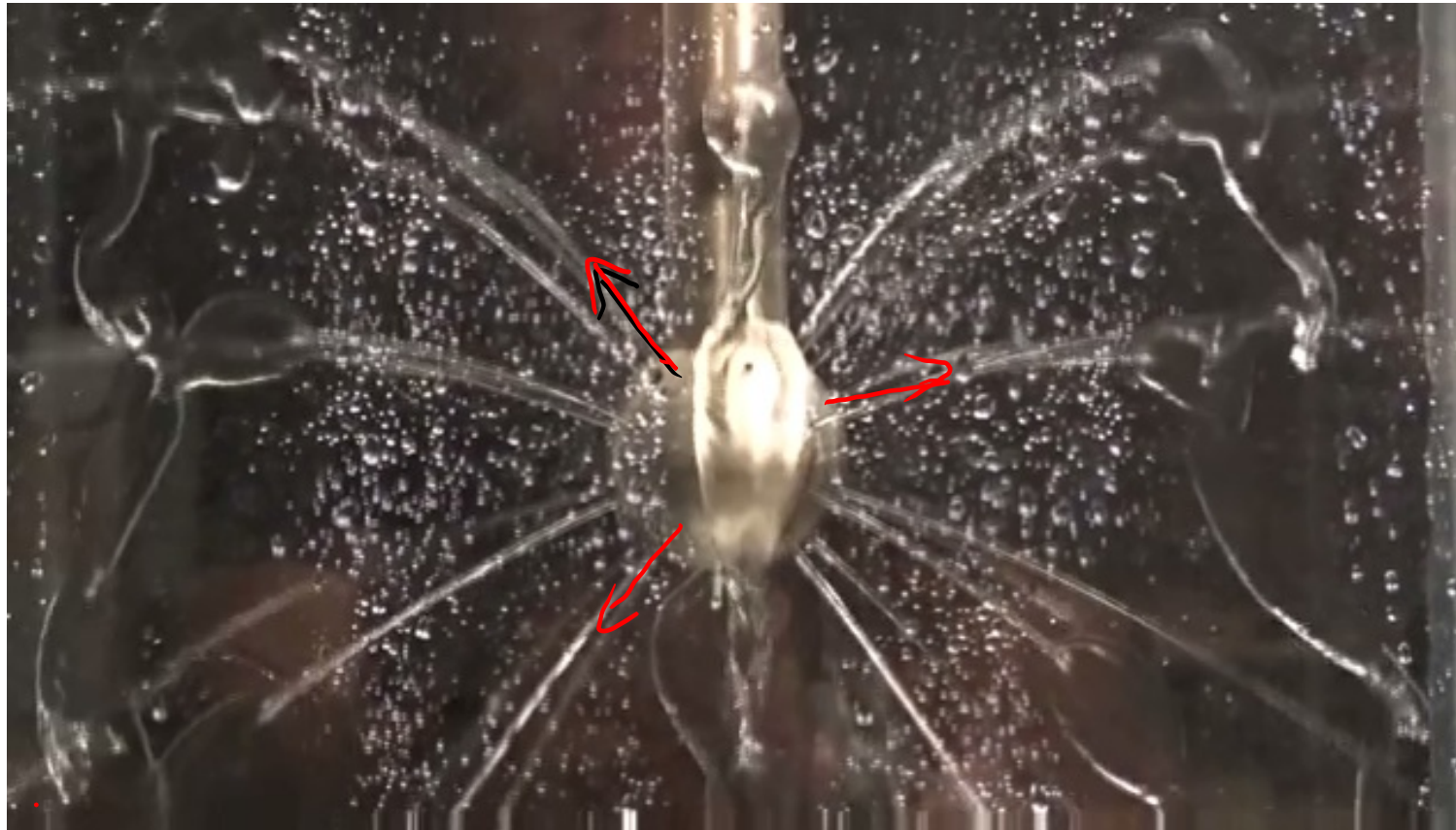
$p = \text{konst.}$ in gesamter Flüssigkeit

(falls weitere Kräfte, z.B. Gewichtskraft, vernachlässigbar sind)

→ gleicher Druck auf alle Wände des Gefäßes

Experiment: Richtungsunabhängigkeit des Drucks

einströmendes Wasser



Experiment: Hydraulische Presse



$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = p$$

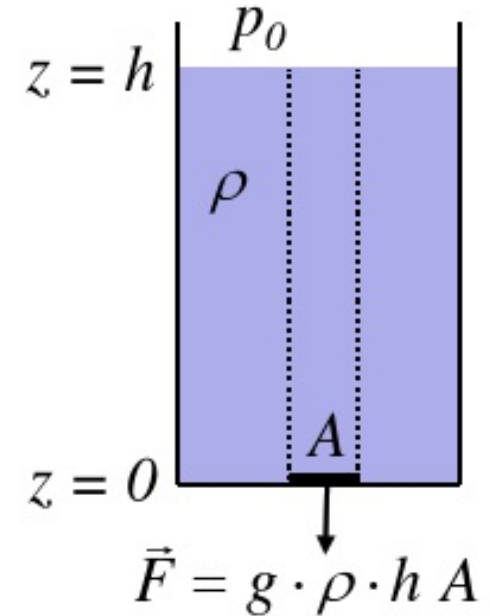
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

Schweredruck

Wirkender **Druck an Boden eines Gefäßes**, das mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt ist, deren Kompressibilität vernachlässigt werden kann:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \approx 0$$

$$\begin{aligned} p(h) &= p_0 \\ p(0) &= p_0 + \frac{|\vec{F}_g|}{A} \\ &= p_0 + \frac{1}{A} \cdot \int_0^h dz \, g \cdot \rho \cdot A \\ &= p_0 + \underbrace{g \cdot \rho \cdot h}_{\text{Schweredruck}} \end{aligned}$$



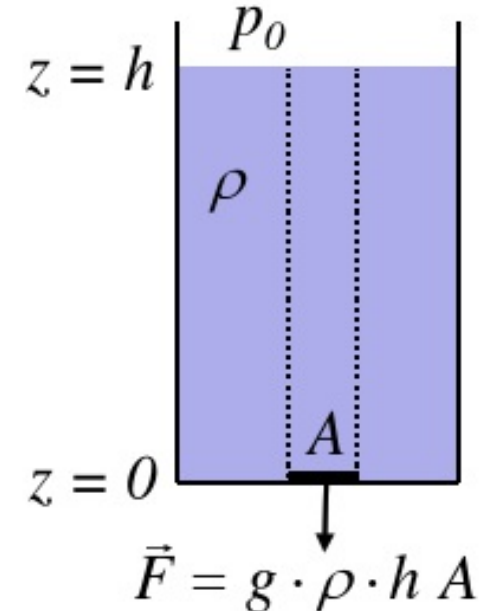
Wirkender **Druck an Boden eines Gefäßes**, das mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt ist, deren Kompressibilität vernachlässigt werden kann:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \approx 0$$

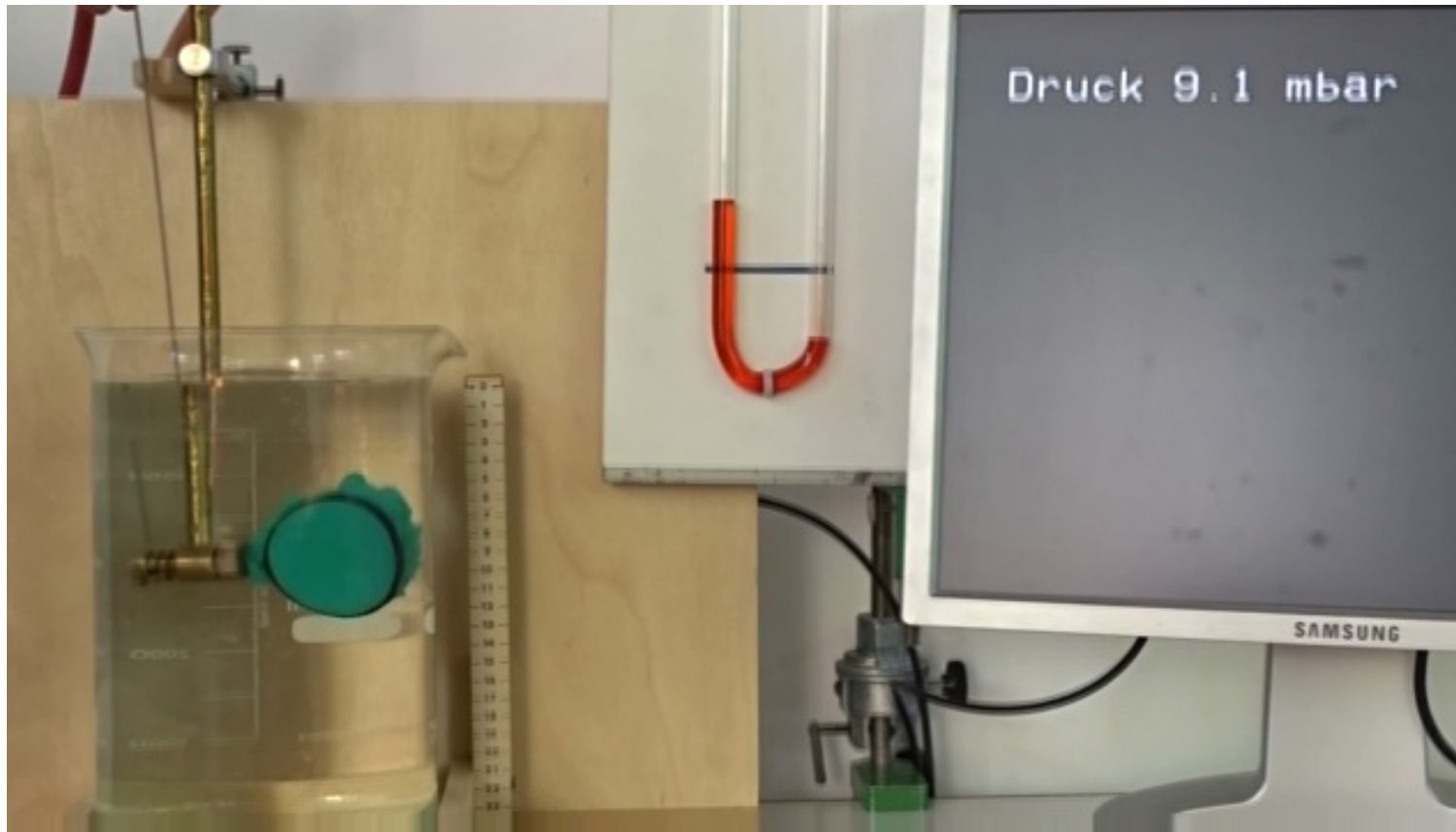
Dann gilt:

$$p(0) = \underbrace{\rho \cdot g \cdot h}_{\text{Schweredruck}} + p_0$$

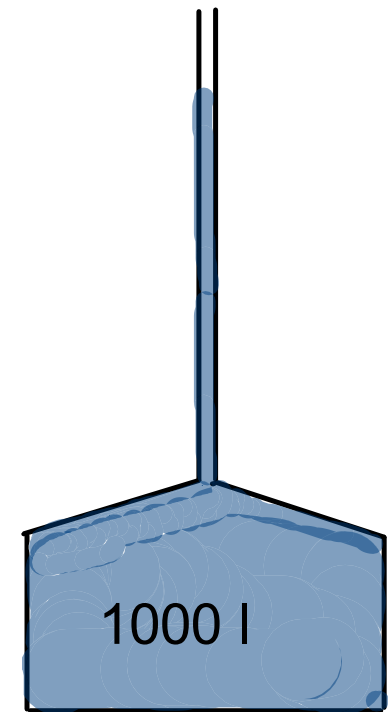
In Höhe z ist Druck: $p(z) = \rho \cdot g \cdot (h - z) + p_0$



Experiment: Tiefenabhängigkeit des Drucks



Experiment: Unabhängigkeit des Schweredruckes vom Gefäß



Wirkender **Druck an Boden eines Gefäßes**, das mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt ist, deren Kompressibilität vernachlässigt werden kann:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \approx 0$$

Dann gilt:

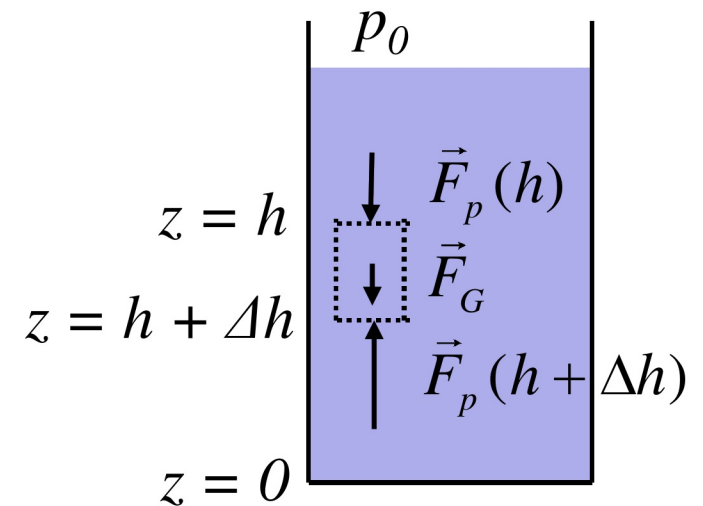
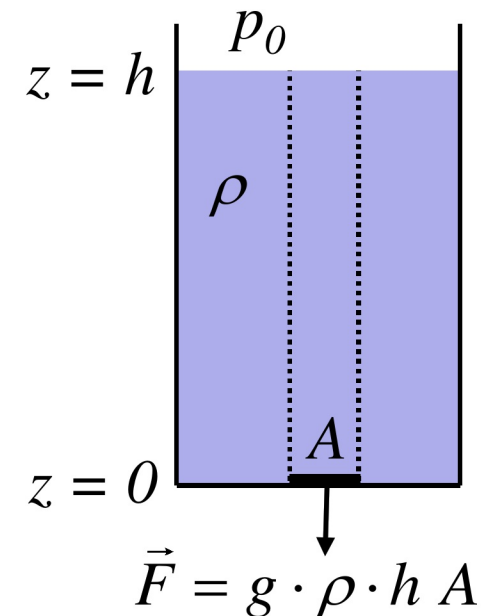
$$p(0) = \underbrace{\rho \cdot g \cdot h}_{\text{Schweredruck}} + p_0$$

Schweredruck

In Höhe z ist Druck: $p(z) = \rho \cdot g \cdot (h - z) + p_0$

Im Inneren einer Flüssigkeit in einem homogenen Schwerfeld kompensieren sich für jedes beliebige Volumenelement die durch die darauf wirkenden Schweredrucke verursachten Kräfte mit der Gewichtskraft:

$$|\Delta \vec{F}_p| = |\Delta \vec{F}_p(h + \Delta h)| - |\Delta \vec{F}_p(h)| = g \cdot \rho \cdot \Delta h A = |\vec{F}_G|$$

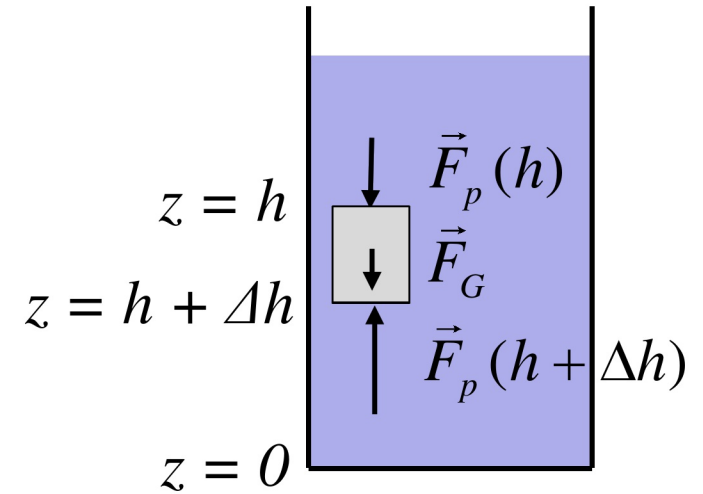


Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite eines Körpers der Dichte ρ_K , der sich im Inneren der Flüssigkeit der Dichte ρ_{Fl} befindet:

$$\Delta p = g \cdot \rho_{Fl} \cdot \Delta h$$

→ Resultierende **Auftriebskraft**:

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= g \cdot \underbrace{\rho_{Fl} \cdot \Delta h \cdot A}_{= \rho_{Fl} \cdot V_K} \cdot \vec{e}_z = -\vec{F}_{G, \text{Flüssigkeit}} \\ &= \rho_{Fl} \cdot V_K \end{aligned}$$



$$F_G = g \cdot \rho_K \cdot \Delta h \cdot A$$

Archimedisches Prinzip:

Ein eingetauchter Körper verliert durch Auftrieb scheinbar so viel Gewicht, wie die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt.

Experiment: Archimedisches Prinzip



Archimedisches Prinzip:

Ein eingetauchter Körper verliert durch Auftrieb scheinbar so viel Gewicht, wie die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt.

Health & Household › Medical Supplies & Equipment › Mobility & Daily Living Aids › Mobility Aids & Equipment › Lift Chairs

Lower Priced Items to Consider



ProBasics Patient Lift - Hydraulic Patient Body Lift For In Home Use - Heavy Duty, Lifts Up to 450 lbs.

★★★★☆ 39

\$378⁹⁹ ✓prime

Is this feature helpful?



Drive Medical Whisper Ultra Quiet Bath Lift, Blue

★★★★☆ 325

\$399⁹⁹ ✓prime



Lumex Splash and Remote

★★★★☆

\$501⁴⁹ ✓prime



Mangar Archimedes Bath Lift

by Mangar

★★★★☆ 13 ratings | 38 answered questions

Available from these sellers.

- Great alternative to a walk-in bath
- Simple to fit or remove – separates into three pieces
- Safety feature: will only lower you into the bath when there is sufficient battery power to raise you back out again
- Lifts up to 364lbs
- Fully waterproof hand control

[Compare with similar items](#)

[Report incorrect product information.](#)

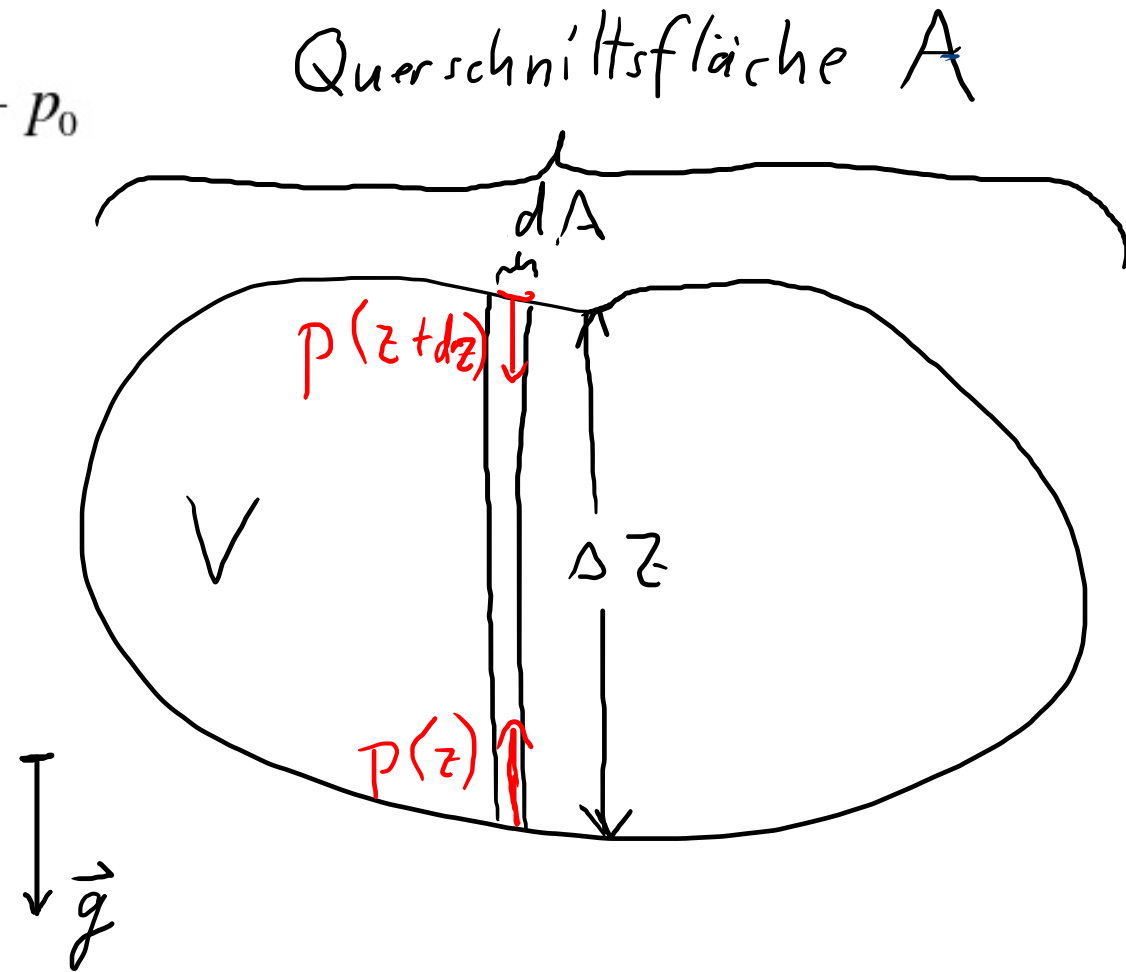
Auftrieb

In Höhe z ist Druck: $p(z) = \rho \cdot g \cdot (h - z) + p_0$

$$\begin{aligned} d\vec{F}_A &= [p(z) - p(z + \Delta z)] \cdot dA \cdot \vec{e}_z \\ &= \rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta z \cdot dA \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Gesamter Körper =

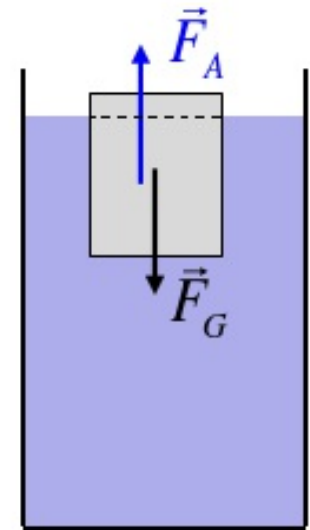
$$\vec{F}_A = \int_A d\vec{F}_A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot \underbrace{\int_A dA \cdot \Delta z}_{V} \cdot \vec{e}_z = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V \cdot \vec{e}_z$$



Gesamtkraft auf Körper: $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_A = -g \cdot (\rho_K - \rho) \cdot V_K \cdot \vec{e}_z$

Ist die (mittlere) Dichte ρ_K des Körpers kleiner als die der Flüssigkeit, schwimmt der Körper, wobei er so tief eintaucht, dass $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_G|$

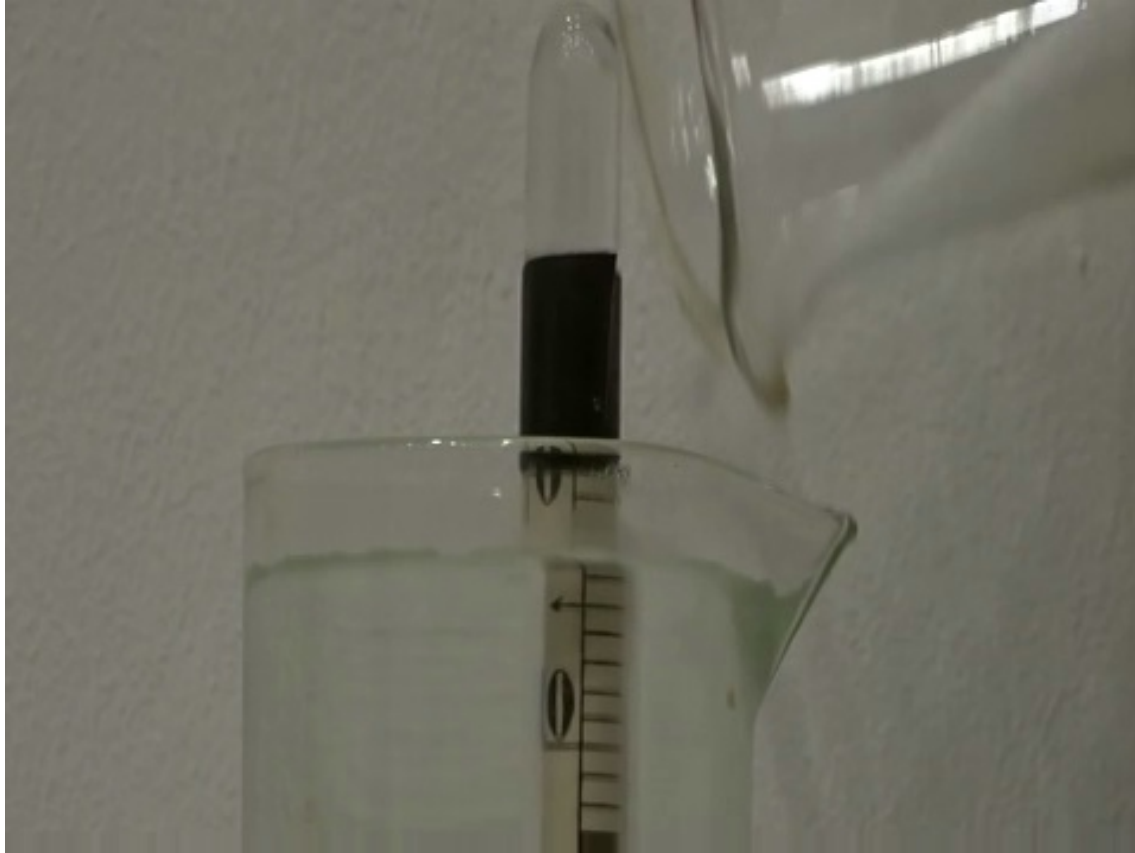
Gewichtskraft greift am Schwerpunkt S_K des Körpers an,
Auftriebskraft an Schwerpunkt S_{Fl} der verdrängten Flüssigkeit



Experiment: Karthesischer Taucher

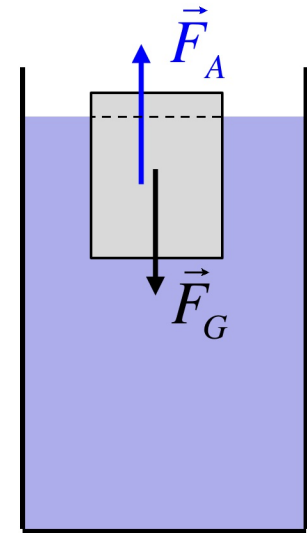


Experiment: Aräometer



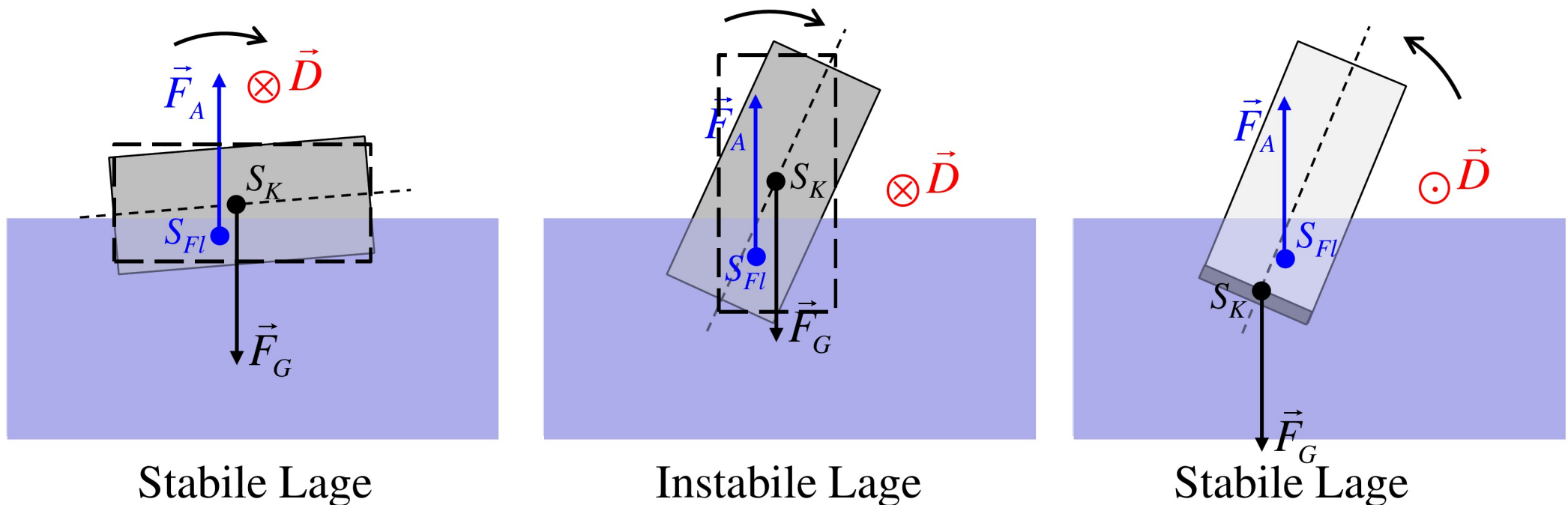
Gesamtkraft auf Körper: $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_A = -g \cdot (\rho_K - \rho) \cdot V_K \cdot \vec{e}_z$

Ist die (mittlere) Dichte ρ_K des Körpers kleiner als die der Flüssigkeit, schwimmt der Körper, wobei er so tief eintaucht, dass $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_G|$



Gewichtskraft greift am Schwerpunkt S_K des Körpers an,
Auftriebskraft an Schwerpunkt S_{Fl} der verdrängten Flüssigkeit

→ Drehmoment, das Stabilität des Schwimmers gegen Umkippen bestimmt



Die Bildung einer Flüssigkeitsgrenzfläche erfordert eine Arbeit W pro Fläche A

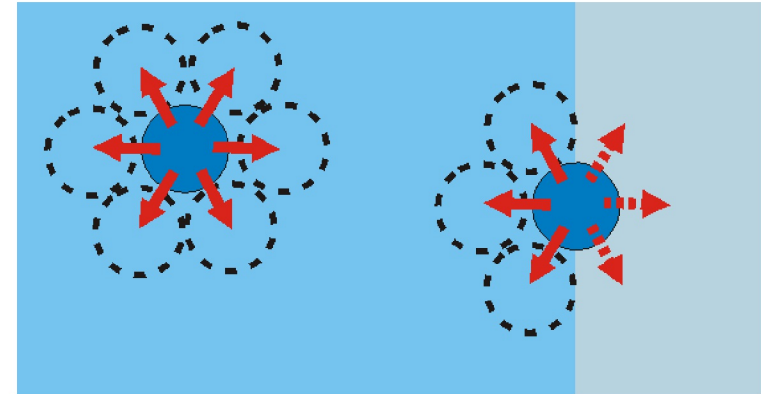
→ Oberflächen-/Grenzflächenspannung γ mit $dW = \gamma \cdot dA$ (Einheit Jm^{-2})

Ursprung:

kohäsive Kräfte zwischen den Molekülen in der Phase

Typische Werte:

- Wasser - Luft: $72 \cdot 10^{-3} \text{ Jm}^{-2}$
- Benzol - Luft: $29 \cdot 10^{-3} \text{ Jm}^{-2}$
- Benzol - Wasser: $35 \cdot 10^{-3} \text{ Jm}^{-2}$
- Quecksilber - Luft: $486 \cdot 10^{-3} \text{ Jm}^{-2}$



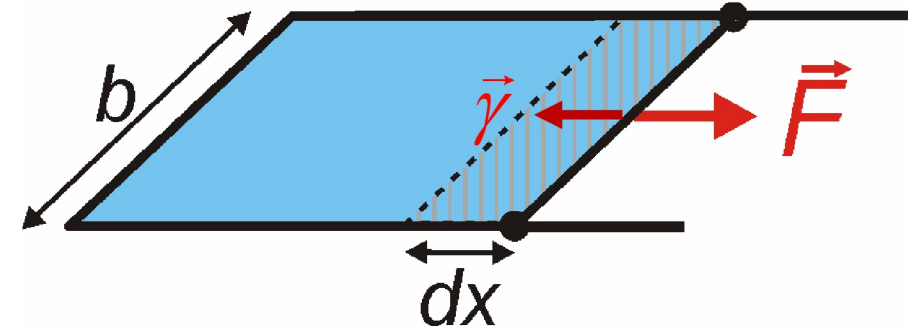
Alternative Bedeutung der Grenzflächenspannung:

Kraft \vec{F} auf Randlinie der Phasengrenze pro Einheitslänge (Einheit N/m)

→ Arbeit, um Film aufzuziehen:

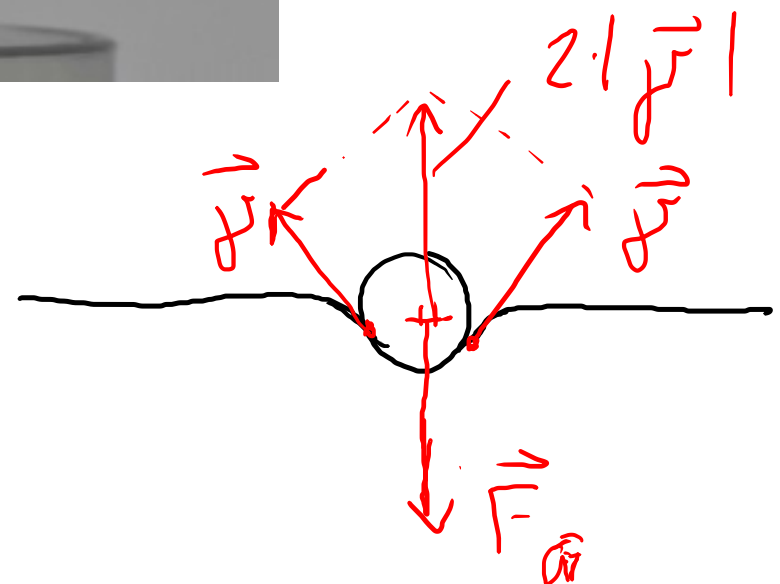
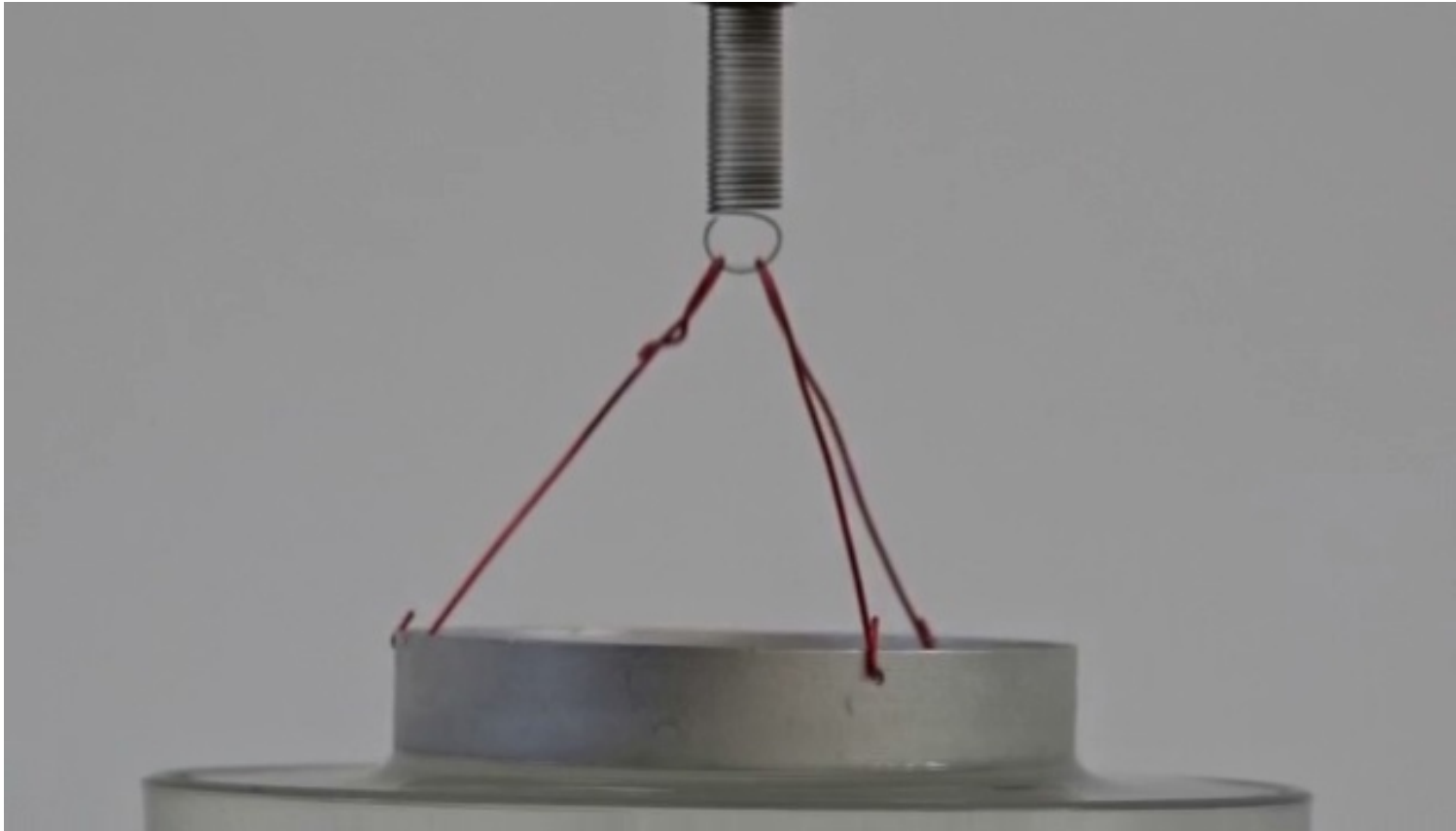
$$dW = 2\gamma \cdot dA = 2\gamma \cdot b \cdot dx$$

$$\rightarrow |\vec{F}| = \left| \frac{dW}{dx} \right| = 2\gamma \cdot b$$

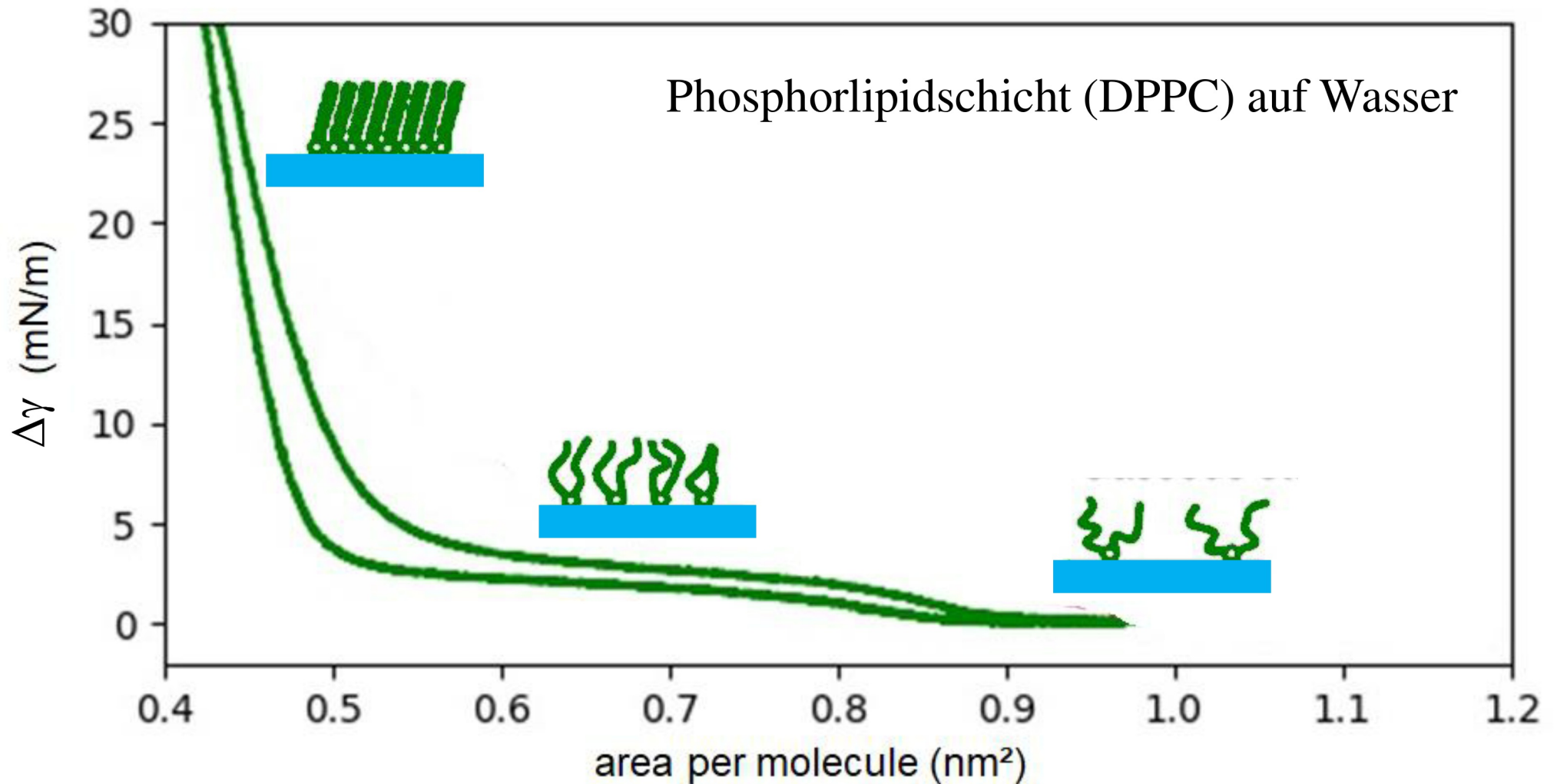


γ kann als Vektor in Richtung $-\vec{F}$ aufgefasst werden
(d.h. liegt in Ebene der Grenzfläche, senkrecht zur Randlinie).

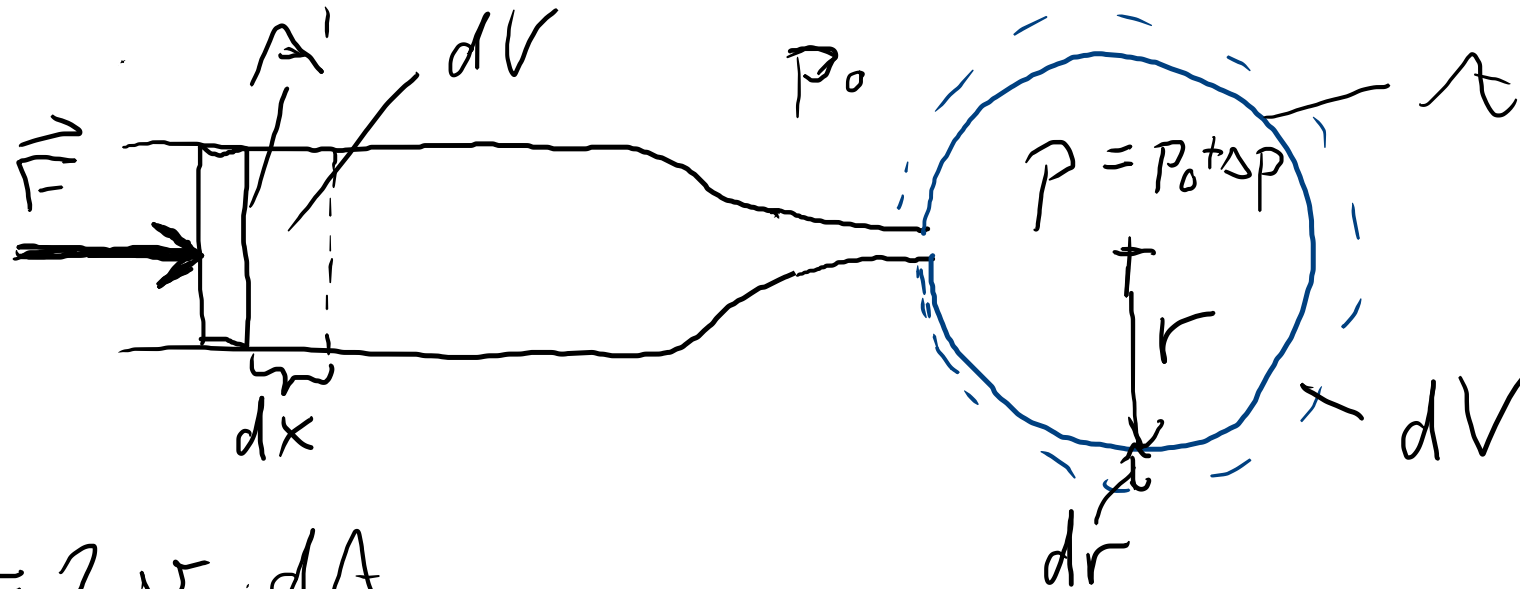
Experiment: Oberflächenspannung



Änderung der Oberflächenspannung in Biomembranen



Seifenblase



$$dE = 2\gamma \cdot dA$$

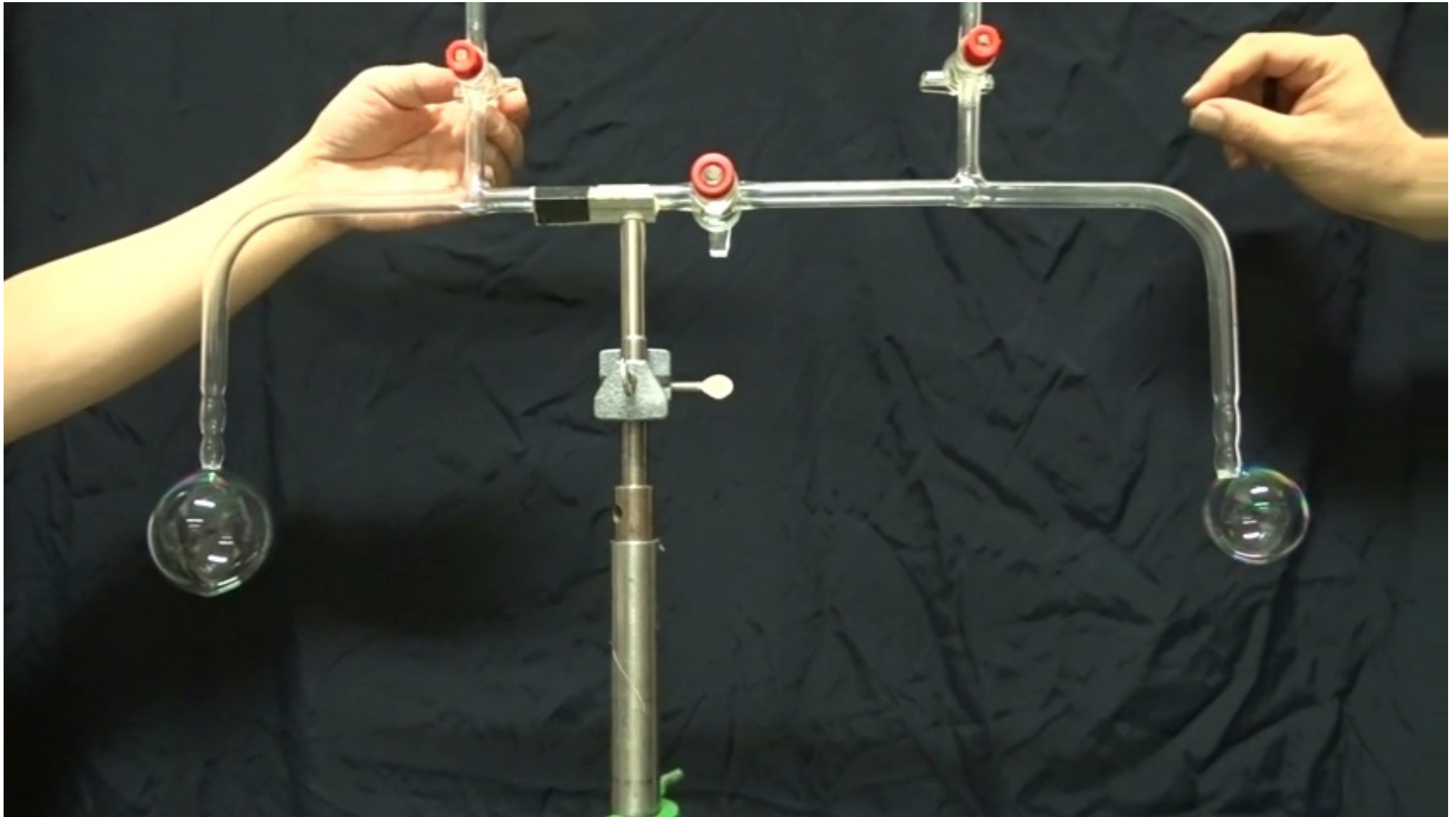
$$= 2\gamma \cdot 4\pi [r^2 - (r - dr)^2] = 4\gamma \cdot 4\pi r \cdot dr$$

$$dW = F \cdot dx = \Delta p \cdot A' \cdot dx = \Delta p \cdot dV$$

$$dE = dW \rightarrow 4\gamma \cdot 4\pi r \cdot dr = \Delta p \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$\rightarrow \underline{\Delta p = 4\gamma / r}$$

Experiment: Innendruck Seifenblasen



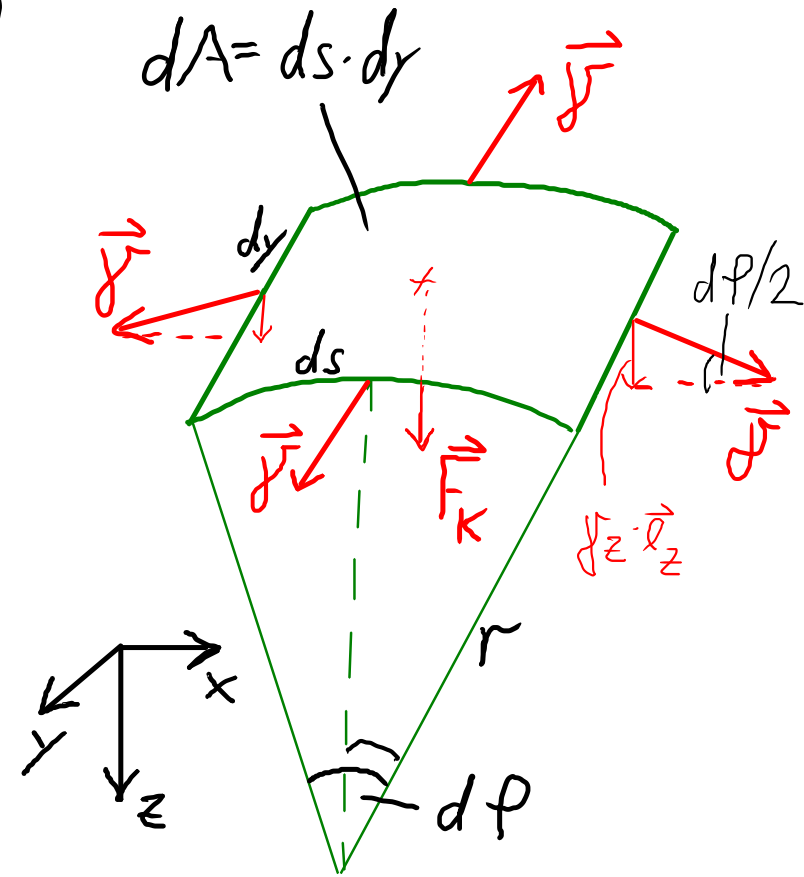
Herleitung des Krümmungsdrucks

Krümmung entlang einer Richtung
(zylindrische Oberfläche):

$$\begin{aligned} |d\vec{F}_K| &= 2 \gamma_z \cdot dy \\ &= 2 \gamma \cdot \underbrace{\sin \frac{d\varphi}{2}}_{\approx \frac{d\varphi}{2}} \cdot dy \\ &= \gamma \cdot d\varphi \cdot dy ; \quad d\varphi = \frac{ds}{r} \\ &= \frac{\gamma}{r} \cdot ds \cdot dy = \frac{\gamma}{r} \cdot dA \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{p}} = \frac{|d\vec{F}_K|}{dA} = \underline{\underline{\frac{\gamma}{r}}}$$

$$\gamma = |\vec{\gamma}|$$



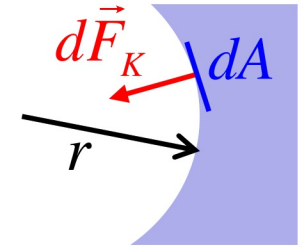
Auf gekrümmte Flüssigkeitsoberflächen, die mit den Radien r_1 und r_2 entlang zueinander orthogonaler Richtungen beschrieben werden können, wirkt ein Krümmungsdruck

$$\Delta p_K = \frac{|d\vec{F}_K|}{dA} = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

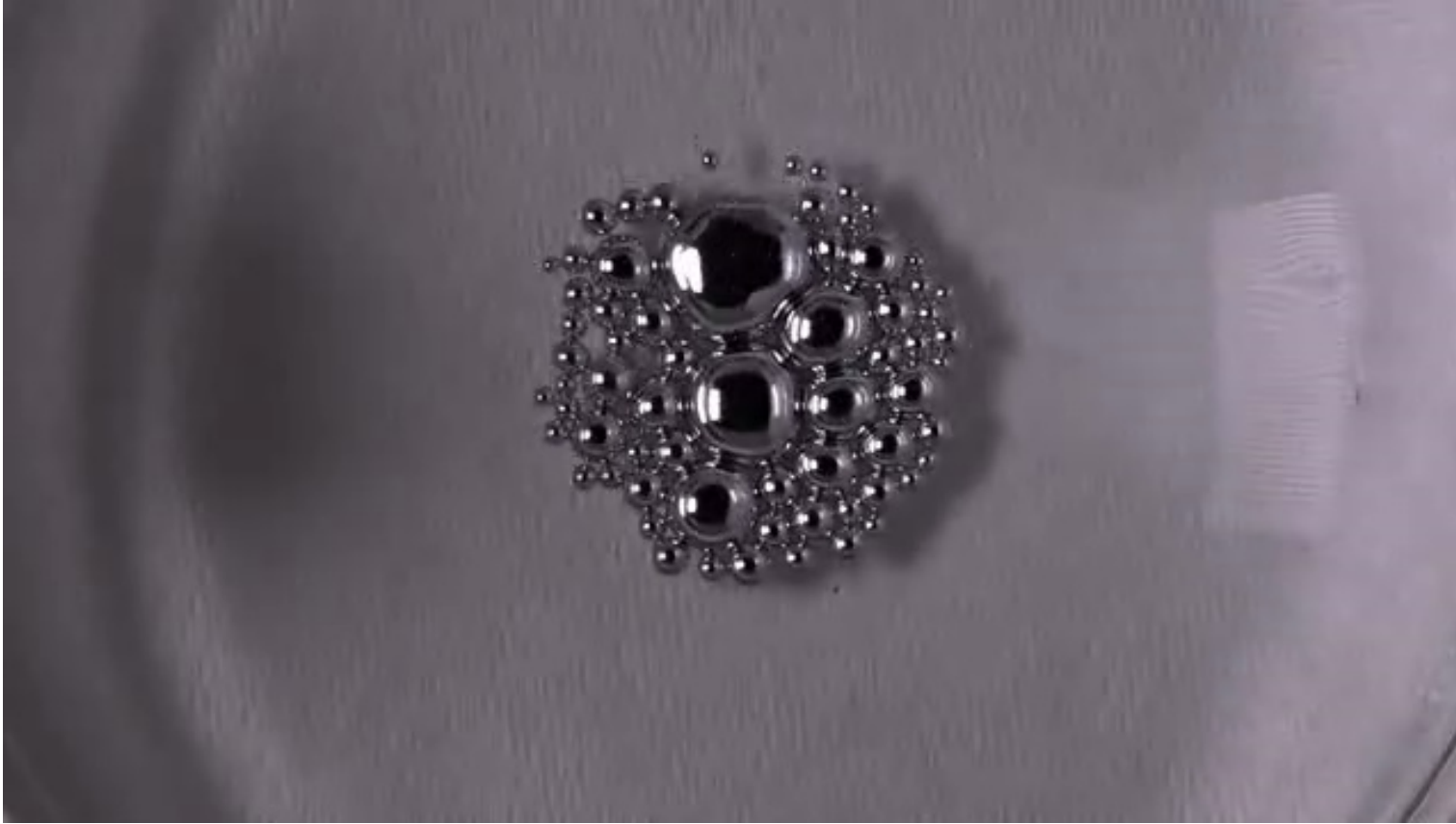
Die Kraft zeigt dabei immer von der konkaven Seite der Grenzfläche weg.

Für eine kugelförmige Oberfläche mit Radius r ist die Druckerhöhung folglich

$$\Delta p_K = \frac{2\gamma}{r}$$



Experiment: Oberflächenspannung Quecksilber



Definierte Winkel an Kontaktlinie zwischen 3 Phasen im Gleichgewicht

1) 3 fluide Phasen

(linsenförmiger Tropfen)

Aus Kompensation der Kräfte folgt:

$$\vec{\gamma}^{AB} + \vec{\gamma}^{BC} + \vec{\gamma}^{AC} = 0$$

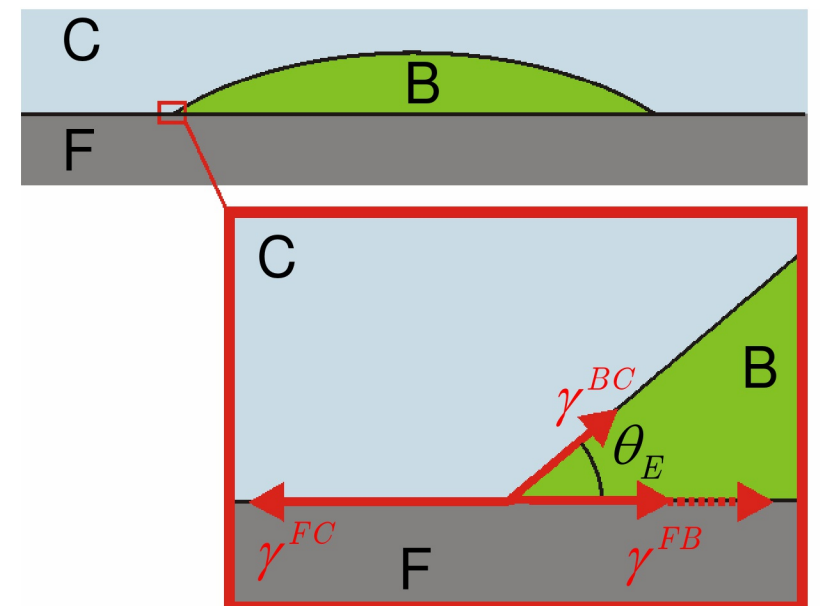
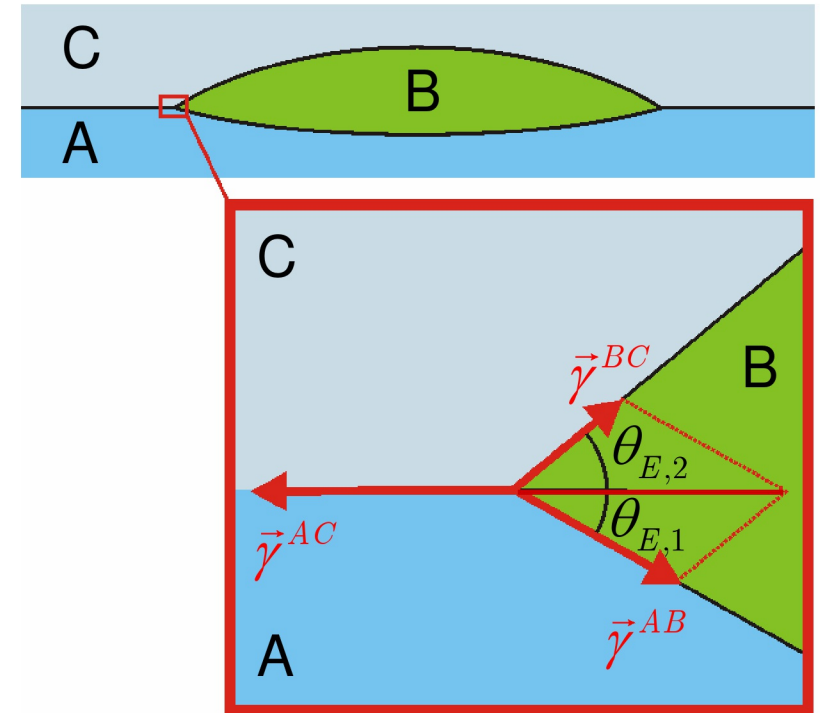
→ Kontaktwinkel:

$$\theta_{E,1} = \cos^{-1} \left[\frac{(\gamma^{AB})^2 + (\gamma^{AC})^2 - (\gamma^{BC})^2}{2\gamma^{AB}\gamma^{AC}} \right]$$

2) 1 feste, 2 fluide Phasen

Festkörper kann sich nicht (makroskopisch) deformieren → Kompensation der in die Festkörperoberfläche projizierten Kräfte:

$$\underline{\gamma^{FC} = \gamma^{FB} + \gamma^{BC} \cos \theta_E}, \text{ Young'sche Gleichung}$$



Energiedifferenz zwischen unbedecktem und bedecktem Substrat beschrieben durch Ausbreitungsparameter $S = \gamma^{FC} - (\gamma^{FB} + \gamma^{BC})$

Davon abhängig drei Fälle:

Vollständige Benetzung:

$$S \geq 0 \rightarrow$$

Kontaktwinkel $\theta_E = 0$



Teilweise Benetzung:

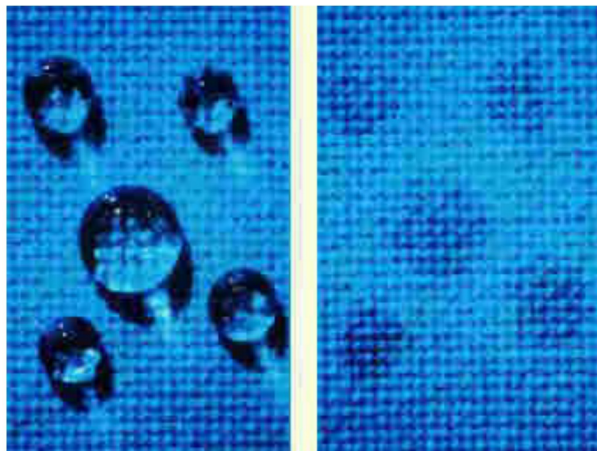
$$S < 0 \rightarrow S = \gamma^{BC} (\cos \theta_E - 1)$$

Kontaktwinkel $0 < \theta_E < 90^\circ$



Nicht benetzend:

Kontaktwinkel $90^\circ < \theta_E < 180^\circ$



reines Wasser mit Seife

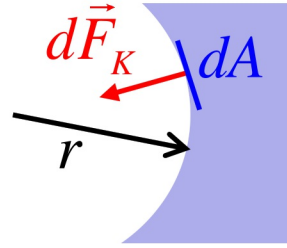
Lotuseffekt



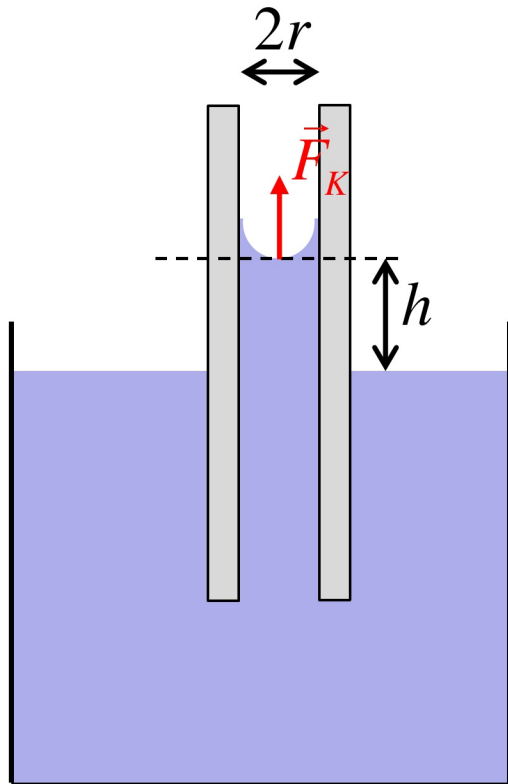
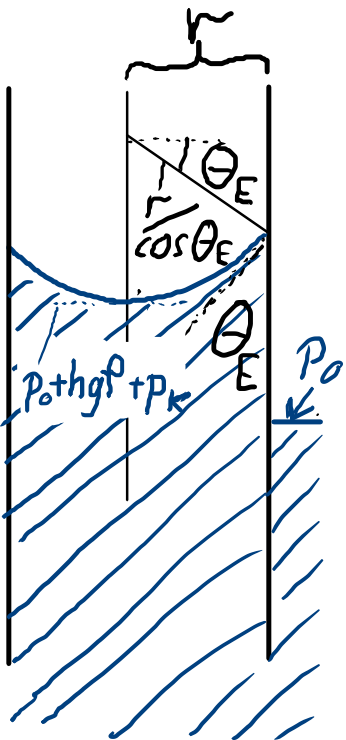
wikipedia

Kapillarität bezeichnet das Phänomen des Aufsteigens (oder Absenkens) des Flüssigkeitsspiegel in dünnen Röhrchen aufgrund von Oberflächenspannung und Benetzung mit Kontaktwinkel θ_E .

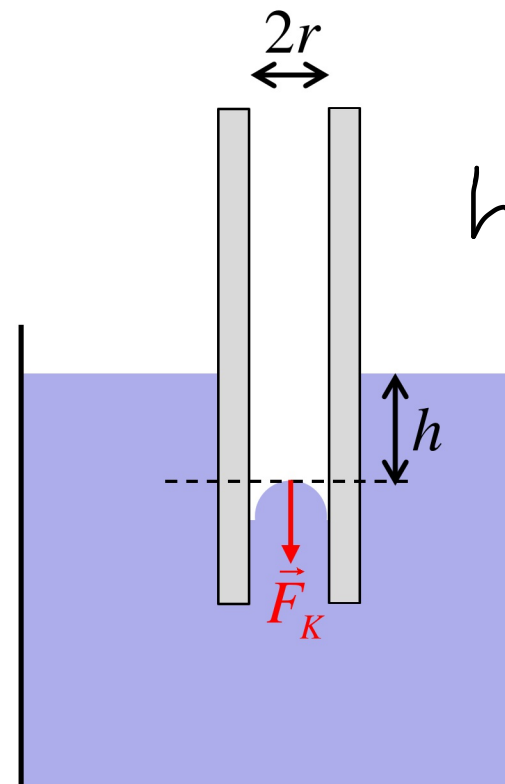
Bei einem Rohrradius r ist der Krümmungsradius der Flüssigkeit $\frac{r}{\cos \theta_E}$



→ Steighöhe $h = \frac{2\gamma \cos \theta_E}{r \cdot g \cdot \rho}$; $\rho \equiv$ Dichte der Flüssigkeit



benetzend



nicht-benetzend

$$\begin{aligned} \Delta p_K &= \frac{2\gamma}{r/\cos \theta_E} \\ &= h g \rho \\ h &= \frac{2\gamma \cos \theta_E}{r g \rho} \end{aligned}$$

Experiment: Kapillarwirkung

