Wechselwirkung von Neutronen mit Materie (Fortsetzung)

I. Krasnov in Vertretung von Prof. Dr. M. Müller

June 3, 2008

Inhalt

Inhalt

Inhalt

1. Stand der Dinge
2. Integration über der Neutronposition
3. Fermi Pseudopotenzial
    - Beschränkung auf Kerne mit einem Nukleon (N=1)
    - Allgemeines System (mehrere Nukleonen)

Inhalt

Stand der Dinge

Doppelt-differentieller Streuquerschnitt

$$\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial\Omega\partial E'}\right)_{\lambda\to\lambda'} = \frac{k'}{k}\left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 |\left\langle\vec{k}'\lambda'|V|\vec{k}\lambda\right\rangle|^2\delta(E_\lambda - E_{\lambda'} + E - E') \quad (1)$$

Wobei

- $\int \delta(E_\lambda - E_{\lambda'} + E - E')dE' = 1$
- $\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \int \ldots dE'$
- es bleibt nun das Matrixelement $|\left\langle\vec{k}'\lambda'|V|\vec{k}\lambda\right\rangle|$ zu berechnen

Integration über die Neutronposition

- Der Abstandsvektor: $\vec{x_j} = \vec{r} - \vec{R_j}$
- Das Potenzial von einem Nukleon j: $V_j = V_j(\vec{x_j})$
- Das Gesamtpotenzial: $V(\vec{x_j}) = \sum_j V_j(\vec{x_j})$

Integration über die Neutronposition

- Der Abstandsvektor: $\vec{x_j} = \vec{r} - \vec{R_j}$
- Das Potenzial von einem Nukleon j: $V_j = V_j(\vec{x_j})$
- Das Gesamtpotenzial: $V(\vec{x_j}) = \sum_j V_j(\vec{x_j})$

Matrixelement

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{k}'\lambda' | V | \mathbf{k}\lambda \rangle &= \sum_j \langle \mathbf{k}'\lambda' | V_j | \mathbf{k}\lambda \rangle \\
&= \sum_j \int \xi^*_{\lambda'} e^{-i\vec{k}'\vec{r}} \; V_j(\vec{r} - \vec{R_j}) \; \xi_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}} \; d\vec{R} d\vec{r} \\
&= \sum_j \int \xi^*_{\lambda'} e^{-i\vec{k}'(x_j + R_j)} \; V_j(\vec{x_j}) \; \xi_\lambda e^{i\vec{k}(x_j + R_j)} \; d\vec{R} d\vec{x_j}
\end{aligned}
$$

Umgruppierung

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{k}'\lambda' | V | \mathbf{k}\lambda \rangle &= \sum_j \int \xi^*_{\lambda'} e^{-i\vec{k}'(\vec{x}_j+\vec{R}_j)} \;\; V_j(\vec{x}_j) \;\; \xi_\lambda e^{i\vec{k}(\vec{x}_j+\vec{R}_j)} \;\; d\vec{R} d\vec{x}_j \\
&= \sum_j \int e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}_j} V_j(\vec{x}_j) d\vec{x}_j \int \xi^*_{\lambda'} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')R_j} \xi_\lambda d\vec{R} \\
&= \sum_j V_j(\vec{Q}) \langle \lambda' | e^{i\vec{Q}\vec{R}_j} | \lambda \rangle
\end{aligned}
$$

Wir haben hier eingeführt:

Streuvektor $\vec{Q} \equiv \vec{k} - \vec{k}'$

Fourierabbild des Potenzials $V_j(\vec{Q}) \equiv \int V_j(\vec{x}_j) e^{i\vec{Q}\vec{x}_j} dx_j$

Matrix-Element $\langle \lambda' | e^{i\vec{Q}\vec{R}_j} | \lambda \rangle = \int \xi^*_{\lambda'} e^{i\vec{Q}R_j} \xi_\lambda d\vec{R}$

Beschränkung auf Kerne mit einem Nukleon (N=1)

Ortsfest: j=1, $\vec{R}_1 = 0$, $\lambda = \lambda'$

$$\langle \vec{k}'\lambda' | V | \vec{k}\lambda \rangle = \int \xi^*_{\lambda'} \xi_\lambda d\vec{R}_1 \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r}$$

$\xi_\lambda$ist normiert

Beschränkung auf Kerne mit einem Nukleon (N=1)

Ortsfest: j=1, $\vec{R}_1 = 0$, $\lambda = \lambda'$

$$\langle \vec{k}'\lambda' | V | \vec{k}\lambda \rangle = \int \xi^*_{\lambda'} \xi_\lambda d\vec{R}_1 \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r}$$

ξ_λ ist normiert

$$= \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r}$$

Beschränkung auf Kerne mit einem Nukleon (N=1)

Ortsfest: j=1, $\vec{R}_1 = 0$, $\lambda = \lambda'$

$$\langle \vec{k}'\lambda' | V | \vec{k}\lambda \rangle = \int \xi^*_{\lambda'} \xi_\lambda d\vec{R}_1 \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r}$$

ξ_λ ist normiert

$$= \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r} \quad \leftarrow \quad \text{Fouriertransformation}$$

Beschränkung auf Kerne mit einem Nukleon (N=1)

Ortsfest: j=1, $\vec{R}_1 = 0$, $\lambda = \lambda'$

$$\langle \vec{k}'\lambda' | V | \vec{k}\lambda \rangle = \int \xi^*_{\lambda'} \xi_\lambda d\vec{R}_1 \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r}$$

ξ_λ ist normiert

$$= \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r} \leftarrow \text{Fouriertransformation}$$

So, der differentielle Streuquerschnitt ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 \left| \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r} \right|^2$$

Beschränkung auf Kerne mit einem Nukleon (N=1)

Ortsfest: j=1, $\vec{R}_1 = 0$, $\lambda = \lambda'$

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{k}'\lambda' | V | \vec{k}\lambda \rangle &= \int \xi^*_{\lambda'} \xi_\lambda \, d\vec{R}_1 \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r} \\
& \xi_\lambda \text{ist normiert} \\
&= \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r} \leftarrow \text{Fouriertransformation}
\end{aligned}
$$

So, der differentielle Streuquerschnitt ergibt:

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 \left| \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r} \right|^2 \leftarrow \text{hier } k' = k
$$

Beschränkung auf Kerne mit einem Nukleon (N=1)

Ortsfest: j=1, $\vec{R}_1 = 0$, $\lambda = \lambda'$

$$\langle \vec{k}'\lambda' | V | \vec{k}\lambda \rangle = \int \xi^*_{\lambda'} \xi_\lambda d\vec{R}_1 \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r}$$

ξ_λ ist normiert

$$= \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r} \quad \leftarrow \quad \text{Fouriertransformation}$$

So, der differentielle Streuquerschnitt ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 \left| \int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} d\vec{r} \right|^2 \quad \leftarrow \text{hier } k' = k \text{ (warum?)}$$

Konkrete Form des Potenzials

Kernkräfte haben eine sehr kurze Reichweite

Lassen wir sie extrem kurz sein,

Konkrete Form des Potenzials

Kernkräfte haben eine sehr kurze Reichweite

Lassen wir sie extrem kurz sein, nämlich in Form einer Deltafunktion:

$$V(\vec{r}) = a\delta(\vec{r}) \quad \text{wobei:} \quad \int \delta(\vec{r})d\vec{r} = 1$$

Konkrete Form des Potenzials

Kernkräfte haben eine sehr kurze Reichweite

Lassen wir sie extrem kurz sein, nämlich in Form einer Deltafunktion:

$$V(\vec{r}) = a\delta(\vec{r}) \quad \text{wobei:} \quad \int \delta(\vec{r})d\vec{r} = 1$$

$$\int V(\vec{r})e^{i\vec{Q}\vec{r}} = a\int \delta(r)e^{i\vec{Q}\vec{r}} = a$$

Konkrete Form des Potenzials

Kernkräfte haben eine sehr kurze Reichweite

Lassen wir sie extrem kurz sein, nämlich in Form einer Deltafunktion:

$$V(\vec{r}) = a\delta(\vec{r}) \quad \text{wobei:} \quad \int \delta(\vec{r}) d\vec{r} = 1$$

$$\int V(\vec{r}) e^{i\vec{Q}\vec{r}} = a \int \delta(r) e^{i\vec{Q}\vec{r}} = a$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 a^2$$

Konkrete Form des Potenzials

Kernkräfte haben eine sehr kurze Reichweite

Lassen wir sie extrem kurz sein, nämlich in Form einer Deltafunktion:

$$V(\vec{r}) = a\delta(\vec{r}) \quad \text{wobei:} \quad \int \delta(\vec{r})d\vec{r} = 1$$

$$\int V(\vec{r})e^{i\vec{Q}\vec{r}} = a \int \delta(r)e^{i\vec{Q}\vec{r}} = a$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 a^2$$

Der Vergleich mit unserem früherem Ergebnis:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b$$

Fermi Pseudopotenzial

Konkrete Form des Potenzials

$$V(\vec{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b\delta(\vec{r})$$

b nennt man die gebundene Streulänge

- Die Herleitung basiert auf der 2. Goldenen Regel von Fermi, d.h. Bornschen Näherung. Das ist die 1. Ordnungs Störungstheorie
  - Voraussetzungen sind nicht erfüllt (Streuung von thermischen Neutronen)
  - Rechtfertigung: Korrekte Beschreibung von anisotroper Streuung auf einen einzelnen fixierten Kern

Fermi Pseudopotenzial

Konkrete Form des Potenzials

$$V(\vec{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b\delta(\vec{r})$$

b nennt man die gebundene Streulänge

- Die Herleitung basiert auf der 2. Goldenen Regel von Fermi, d.h. Bornschen Näherung. Das ist die 1. Ordnungs Störungstheorie
  - Voraussetzungen sind nicht erfüllt (Streuung von thermischen Neutronen)
  - Rechtfertigung: Korrekte Beschreibung von anisotroper Streuung auf einen einzelnen fixierten Kern
- Keine Übereinstimmung des Pseudopotenzials mit dem tatsächlichen Beispiel:
  - abstoßendes Potenzial: $b > 0$
  - anziehendes Potenzial: $b < 0$ oder $b > 0$ (Formabhängig)

Beispiel: Genaue Lösung für die Streuung am Topfpotenzial

Der Parameter: $x = \sqrt{2mV} r_0 / \hbar$,
wobei r_0 die Reichweite ist und V die Stärke des Potenzials ist

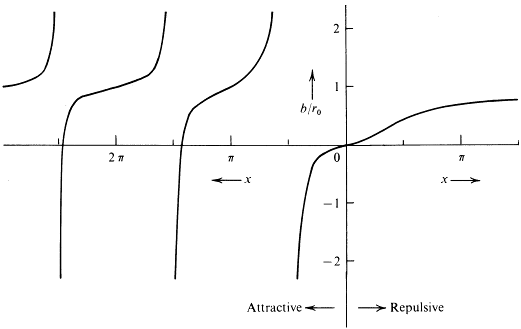

Figure: Streulänge als Funktion des Parameters x. (G.L. Squires, 1978)

Gebundene/Freie Streulänge

- Gebundene Streulänge b
- Freie Streulänge b_f

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{mM}{m+M} \\ \frac{b_f}{\mu} &= \frac{b}{m} \\ b_f &= \frac{M}{m+M} b \end{aligned}$$

- Wasserstoff

$$b_f = b/2$$

Allgemeines System

- der Beitrag von j-ten Nukleon

$$V_j(\vec{x}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b_j \delta(\vec{x})$$

- Fouriertransformation

$$V_j(\vec{Q}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b_j$$

Allgemeines System

- der Beitrag von j-ten Nukleon

$$V_j(\vec{x}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b_j \delta(\vec{x})$$

- Fouriertransformation

$$V_j(\vec{Q}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b_j$$

Das ergibt:

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{\lambda\to\lambda'} = \frac{k'}{k} \left| \sum_j b_j \langle\lambda'|e^{i\vec{Q}\vec{R}_j}|\lambda\rangle \right|^2 \delta\left(E_\lambda - E_{\lambda'} + E - E'\right)$$

δ–Funktion in der Integralschreibweise

Darstellung der eindimensionalen δ–Funktion

$$\delta(\kappa - \kappa') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa' t} e^{it\kappa} dt$$

Das ist nichts anderes als die Fourierrücktransformation.

δ–Funktion in der Integralschreibweise

Darstellung der eindimensionalen δ–Funktion

$$\delta(\kappa - \kappa') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa' t} e^{it\kappa} dt$$

Das ist nichts anderes als die Fourierrücktransformation.

Integralschreibweise für die δ–Funktion

$$\begin{aligned} \delta\left(E_\lambda - E_{\lambda'} + E - E'\right) &= \delta\left(E_\lambda - E_{\lambda'} - \hbar\omega\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_{\lambda'} - E_\lambda)t/\hbar} e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

wobei wir hier folgende Bezeichnung nutzen:

$$\hbar\omega \equiv E - E'$$

Hamiltonian und Operatorfunktionen

- wenn $\hat{H}$ der Hamiltonian von unserem System ist, dann
  - sind die Zustände λ und λ' Eigenfunktionen von $\hat{H}$
  - mit Eigenwerten E_λ und $E_{\lambda'}$

  das heißt $\hat{H}|\lambda\rangle = E_\lambda|\lambda\rangle$ und $\hat{H}|\lambda'\rangle = E_{\lambda'}|\lambda'\rangle$

Hamiltonian und Operatorfunktionen

- wenn $\hat{H}$ der Hamiltonian von unserem System ist, dann
  - sind die Zustände λ und λ' Eigenfunktionen von $\hat{H}$
  - mit Eigenwerten E_λ und $E_{\lambda'}$

  das heißt $\hat{H}|\lambda\rangle = E_\lambda|\lambda\rangle$ und $\hat{H}|\lambda'\rangle = E_{\lambda'}|\lambda'\rangle$
- Bildung der Funktionen von $\hat{H}$

$$\hat{H}^n|\lambda\rangle = E_\lambda^n|\lambda\rangle$$

$$F(E)|\lambda\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n E^n\right)|\lambda\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \hat{H}^n\right)|\lambda\rangle = F(\hat{H})|\lambda\rangle$$

Hamiltonian und Operatorfunktionen

- wenn $\hat{H}$ der Hamiltonian von unserem System ist, dann
  - sind die Zustände λ und λ' Eigenfunktionen von $\hat{H}$
  - mit Eigenwerten E_λ und $E_{\lambda'}$

  das heißt $\hat{H}|\lambda\rangle = E_\lambda|\lambda\rangle$ und $\hat{H}|\lambda'\rangle = E_{\lambda'}|\lambda'\rangle$
- Bildung der Funktionen von $\hat{H}$

$$\hat{H}^n|\lambda\rangle = E_\lambda^n|\lambda\rangle$$

$$F(E)|\lambda\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n E^n\right)|\lambda\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \hat{H}^n\right)|\lambda\rangle = F(\hat{H})|\lambda\rangle$$

- Exponentfunktion

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\lambda\rangle = e^{-iE_\lambda t/\hbar}|\lambda\rangle$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{\lambda\to\lambda'} = \frac{k'}{k}\left|\sum_j b_j \langle\lambda'|e^{i\vec{Q}\vec{R}_j}|\lambda\rangle\right|^2 \delta\left(E_\lambda - E_{\lambda'} + E - E'\right)$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{\lambda\to\lambda'} = \frac{k'}{k}\left|\sum_j b_j \langle\lambda'|e^{i\vec{Q}\vec{R}_j}|\lambda\rangle\right|^2 \delta\left(E_\lambda - E_{\lambda'} + E - E'\right)$$

Wir haben N^2 Terme der Art

$$b_{j'}^{*} b_j \left\langle \lambda'|e^{i\vec{Q}\vec{R}_{j'}}|\lambda\right\rangle^{*} \left\langle \lambda'|e^{i\vec{Q}\vec{R}_j}|\lambda\right\rangle = b_{j'} b_j \left\langle \lambda|e^{-i\vec{Q}\vec{R}_{j'}}|\lambda'\right\rangle \left\langle \lambda'|e^{i\vec{Q}\vec{R}_j}|\lambda\right\rangle$$

weil b_j ist reell und $\langle\lambda'|\hat{A}|\lambda\rangle^* = \langle\lambda|\hat{A}^\dagger|\lambda'\rangle$

So, unser doppelt differentieller Streuquerschnitt

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{\lambda\rightarrow\lambda'} =$$

So, unser doppelt differentieller Streuquerschnitt

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{\lambda\to\lambda'} = \frac{k'}{k}\sum_{jj'} b_{j'} b_j \left\langle \lambda | e^{-i\vec{Q}\vec{R}_{j'}} | \lambda' \right\rangle \left\langle \lambda' | e^{i\vec{Q}\vec{R}_j} | \lambda \right\rangle$$

$$\times$$

So, unser doppelt differentieller Streuquerschnitt

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{\lambda\to\lambda'} &= \frac{k'}{k}\sum_{jj'} b_{j'} b_j \left\langle \lambda \middle| e^{-i\vec{Q}\vec{R}_{j'}} \middle| \lambda' \right\rangle \left\langle \lambda' \middle| e^{i\vec{Q}\vec{R}_j} \middle| \lambda \right\rangle \\
&\times \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_{\lambda'}-E_\lambda)t/\hbar} e^{-i\hbar\omega t} dt
\end{aligned}
$$

So, unser doppelt differentieller Streuquerschnitt

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{\lambda\to\lambda'} &= \frac{k'}{k}\sum_{jj'} b_{j'} b_j \left\langle \lambda \middle| e^{-i\vec{Q}\vec{R_{j'}}} \middle| \lambda' \right\rangle \left\langle \lambda' \middle| e^{i\vec{Q}\vec{R_j}} \middle| \lambda \right\rangle \\
&\times \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_{\lambda'}-E_\lambda)t/\hbar} e^{-i\hbar\omega t} dt \\
&= \frac{k'}{k}\frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{jj'} b_{j'} b_j \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \lambda \middle| e^{-i\vec{Q}\vec{R_{j'}}} \middle| \lambda' \right\rangle \left\langle \lambda' \middle| e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} e^{i\vec{Q}\vec{R_j}} e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}} \middle| \lambda \right\rangle e^{-i\omega t} dt
\end{aligned}
$$