Kapitel 2

Mechanik

Die Mechanik ist die älteste der physikalischen Wissenschaften. Sie befasst sich mit der Bewegung von Objekten. Die reine Beschreibung von Bewegungen stellt die Kinematik dar. Setzt man die Bewegung in Bezug zu den Kräften, die auf die Objekte wirken, erhält man die Dynamik. Da ein realer (ausgedehnter) Körper bei seiner Bewegung sowohl rotieren als auch schwingen kann, vereinfachen wir zunächst und beschränken uns auf einen idealisierten Körper, den sogenannten Massenpunkt (ohne Ausdehnung aber mit Masse behaftet). Die für den Massenpunkt hergeleiteten Gesetze gelten auch für einen realen Körper, der eine reine Translation ausführt, da bei einer Translation alle Punkte des Körpers die gleiche Bahnkurve beschreiben, es also ausreicht, einen einzigen zu diskutieren.

2.1 Kinematik

Zur Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes verwenden wir den Ortsvektor $\vec{r}(t)$, der zu jedem Zeitpunkt t die Position des Punktes relativ zu einem willkürlich gewählten Koordinatenursprung angibt. Unter einer Bewegung eines Körpers versteht man also in der Physik die Veränderung seines Ortes mit der Zeit relativ zu einem Bezugssystem (Koordinatensystem und Uhr). Der Punkt möge zur Zeit t_1 am Ort $\vec{r}(t_1)$ und zur späteren Zeit t_2 am Ort $\vec{r}(t_2)$ sein, d. h. er benötige die Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$, um die effektive Verschiebung $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ zu durchlaufen. Als mittlere Geschwindigkeit $\langle\vec{v}\rangle$ definiert man den folgenden Differenzenquotienten

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{2.1}$$

Diese Größe ist anschaulich die Sekante an die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durch die Punkte $\vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}(t_2)$. Um die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem beliebigen Punkt $\vec{r}(t)$ zu erfahren, muss man zum Differentialquotienten übergehen

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{r}\,'(t) = \dot{\vec{r}}(t). \tag{2.2}$$

Anschaulich ist $\vec{v}(t)$ die Tangente an die Bahnkurve im Punkt $\vec{r}(t)$, die als Grenzlage der Sekante für verschwindendes Zeitintervall definiert ist. Die Einheit der Geschwindigkeit ist Meter pro Sekunde, also

$$[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{2.3}$$

Die Geschwindigkeit gibt an, wie sich der Ort eines Massenpunktes mit der Zeit ändert. Nun gibt es Bewegungen, bei denen sich auch die Geschwindigkeit zeitlich ändert; solche Bewegungen nennt man beschleunigt. Ganz analog definiert man die mittlere Beschleunigung $\langle\vec{a}\rangle$ als Differenzenquotienten

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.4}$$

und die momentane Beschleunigung $\vec{a}(t)$ als den Differentialquotienten

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.5}$$

Die Einheit der Beschleunigung ist Meter pro Quadratsekunde, also

$$[a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{2.6}$$

2.1.1 Geradlinige Bewegung

Im Folgenden betrachten wir Bewegungen entlang nur einer Dimension. Der allgemeine Ortsvektor $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ wird also reduziert auf lediglich eine seiner Komponenten, also etwa $x(t)$. Wir schauen uns also Bewegungen entlang der x-Achse an. Solch eine Bewegung kann beispielsweise beschrieben werden durch

$$x(t) = 4 - 27\,t + t^3. \tag{2.7}$$

Mit den obigen Definitionen können wir die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ und die momentane Beschleunigung $a(t)$ durch Differentiation leicht ausrechnen:

$$v(t) = \dot{x}(t) = x'(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -27 + 3\,t^2, \tag{2.8}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = x''(t) = \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = 6\,t. \tag{2.9}$$

Abbildung 2.1 illustriert zusammenfassend die Beziehungen zwischen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ für den Fall einer geradlinigen und mit gleichbleibender Beschleunigung durchgeführten Bewegung (beachten Sie, dass im linken Diagramm der Weg mit s statt mit x bezeichnet wurde). Wäre keine Beschleunigung vorhanden, dann wäre der zur Zeit t_1 zurückgelegte Weg $s(t_1) = v_0 t_1$. Da die Beschleunigung aber nicht verschwindet, müssen wir noch $\frac{1}{2}at_1^2$ addieren. Die Geschwindigkeit der Bewegung ergibt sich nunmehr bekannterweise als die erste Ableitung des Weges nach der Zeit, also $v(t) = s'(t)$. Für unseren speziellen Fall ergibt dies die Gerade im Geschindigkeits-Zeit-Diagramm (siehe mittleren Graphen in Abbildung 2.1). Hier haben wir die Fläche zwischen dem Graphen von $v(t)$ und der Zeitachse schraffiert, um anzudeuten, dass man $s(t)$ auch als Integral der Funktion $v(t)$ deuten kann. Insbesondere gilt für die Fläche im Zeitintervall $[0, t_1]$:

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} v(t)\mathrm{d}t + s_0. \tag{2.10}$$

Ganz analog ist der Graph der Beschleunigung im rechten Diagramm der Abbildung 2.1 zu deuten. Wegen $a(t) = v'(t)$ erhalten wir eine Gerade parallel zur Zeitachse. Dies bedeutet, dass die Beschleunigung der Bewegung eine Konstante ist (wie vorausgesetzt). Die Schraffur der Fläche zwischen dem Graphen von $a(t)$ und der Zeitachse illustriert, dass $v(t)$ äquivalent als das

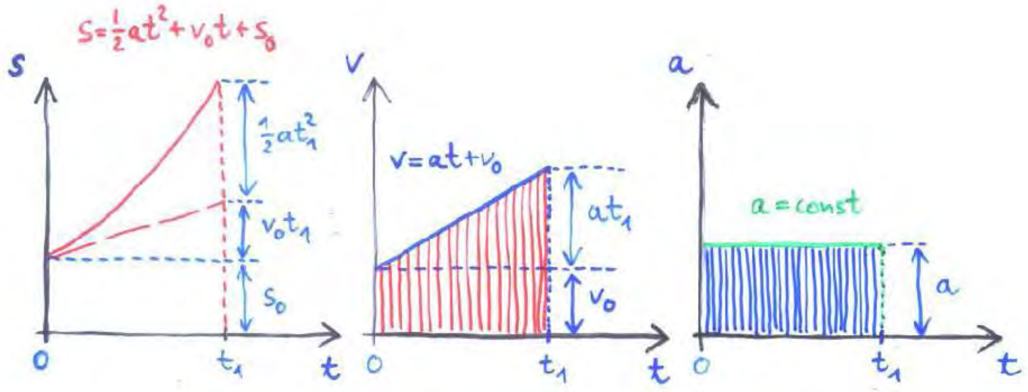

Abbildung 2.1: Zusammenhang zwischen $s(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ bei der geradlinigen Bewegung mit konstanter Beschleunigung.

Integral der Beschleunigung gesehen werden kann, also insbesondere für das Zeitintervall $[0, t_1]$ gilt:

$$v(t_1) = \int_0^{t_1} a(t)\mathrm{d}t + v_0. \tag{2.11}$$

Bewegungen mit konstanter Beschleunigung (a = const) kommen im Alltag sehr häufig vor. Infolgedessen werden wir die zugehörigen Gleichungen hier herleiten und in den Übungen an zahlreichen Beispielen anwenden. Falls die Beschleunigung konstant ist, dann sind mittlere und momentane Beschleunigung gleich groß, und wir können schreiben

$$a = \langle a \rangle = \frac{v - v_0}{t - 0} \Leftrightarrow v = v_0 + a\,t, \tag{2.12}$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit $t_0 = 0$ sein möge. Für die Verschiebung entlang der x-Achse können wir analog schreiben

$$x = x_0 + \langle v \rangle\, t, \tag{2.13}$$

wobei x_0 die Startposition zur Zeit $t_0 = 0$ bezeichne. Wir können $\langle v \rangle$ für die Bewegung mit konstanter Beschleunigung leicht bestimmen; sie ist einfach der arithmetische Mittelwert der Geschwindigkeiten v_0 zu Beginn der Bewegung und v zur Zeit t der Bewegung, also

$$\langle v \rangle = \frac{v + v_0}{2}. \tag{2.14}$$

Mit Hilfe der obigen Gleichungen erhalten wir

$$\langle v \rangle = v_0 + \frac{1}{2}at \tag{2.15}$$

und schließlich

$$x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2. \tag{2.16}$$

Die letzte Gleichung ist das Weg-Zeit-Gesetz für die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung. Bilden Sie die zweite Ableitung und prüfen Sie, ob die Beschleunigung wirklich zeitlich konstant ist. Als einfaches Beispiel behandeln wir abschließend den freien Fall im Gravitationsfeld etwa der Erde. Als freien Fall bezeichnen wir eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der für alle Körper am gleichen Ort konstanten Fall- oder Erdbeschleunigung. Für nicht allzu große Fallhöhen und für einen festen Breitengrad ist die Erdbeschleunigung (bezeichnet mit g) eine Konstante, deren Betrag auf Meeresniveau etwa

$$g = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{2.17}$$

ist (am Äquator findet man $g = 9{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und an den Polen $g = 9{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$). Sie steigen mit einer Tomate auf das höchst erreichbare Niveau des Eiffel-Turms (276 m hoch) und lassen die Tomate fallen. Wir nehmen an, dass der Luftwiderstand nicht störe. Nach welcher Zeit schlägt die Tomate am Boden auf? Welche Geschwindigkeit besitzt sie kurz vor dem Aufschlag? Die Anfangsgeschwindigkeit der Tomate ist $v_0 = 0$, da wir sie lediglich aus der Hand fallen lassen. Um die Flugdauer zu berechnen, verwenden wir die Formel $s = \frac{1}{2}gt^2$. Wir kennen s (nämlich die Höhe des Eiffel-Turms) und die konstante Erdbeschleunigung g und lösen die Gleichung nach der unbekannten Zeit t auf:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2\,s}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 276\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \\ &\approx 7{,}5\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit der Tomate kurz vor dem Aufschlag berechnen wir mittels $v = g\,t$, also

$$\begin{aligned} v &= 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times 7{,}5\,\mathrm{s} \\ &\approx 73{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

2.1.2 Bezugssysteme

In der Vorlesung haben Sie das folgende Experiment beobachtet: Auf der Luftkissenbahn fährt ein Wagen mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung. Auf dem Wagen ist ein Trichter befestigt, der einen aus seinem Inneren nach oben beschleunigten Tischtennisball wieder auffängt. Als ruhender Beobachter - das sind Sie, sitzend im Hörsaal - bewegt sich der Ball auf einer Wurfparabel (siehe nächsten Abschnitt). Nun denken Sie um! Stellen Sie sich vor, dass Sie mit dem Wagen fahren (beispielswiese im Trichter). Jetzt sehen Sie den Ball senkrecht nach oben fliegen und wieder zurück kehren. Damit halten wir fest: Bewegungen beschreibt man als Ortsveränderungen gegenüber einem Bezugssystem. Findet ihm gegenüber keine Ortsveränderung statt, so spricht man von Ruhe gegenüber diesem System. Abbildung 2.2 hilft Ihnen beim Umdenken in einer anderen Situation: Das linke Bild zeigt einen vorbei fahrenden Radfahrer, der von einer bezüglich des Hauses ruhenden Kamera fotografiert wurde. Das reflektierende Katzenauge, das am Vorderrad montiert wurde, beschreibt eine Zykloide. Im rechten Bild hingegen bewegt sich die Kamera mit dem Radfahrer. Jetzt beschreibt das Katzenauge eine Kreisbahn, und der Hintergrund ist unscharf. Das Bezugssystem des Beobachters ist also wichtig für die Beschreibung von Bewegungen. Man kann also fragen, wie sich Ruhe und Bewegung voneinander unterscheiden? Kann man überhaupt ein absolut ruhendes Bezugssystem finden? Es gibt ein solches Bezugssystem nicht, und alle Systeme, die sich zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit, bewegen sind äquivalent.

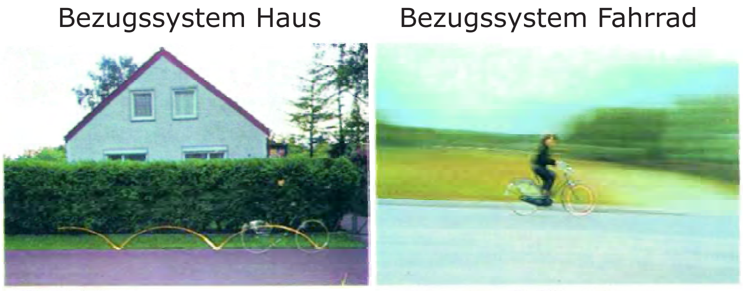

Abbildung 2.2: Bewegung eines Radfahrers in unterschiedlichen Bezugssystemen.

2.1.3 Projektilbewegung

In diesem Abschnitt betrachten wir einen speziellen Fall einer zweidimensionalen Bewegung. Ein Teilchen fliege in einer vertikalen Ebene mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ und sei stets der Erdbeschleunigung $\vec{g}$ ausgesetzt. Diese Bewegung nennt man Projektilbewegung. Beispiele sind geschlagene Golfbälle oder Kanonenkugeln, nicht aber fliegende Enten oder Flugzeuge.

Zur Beschreibung der Bewegung zerlegen wir den Vektor der Anfangsgeschwindigkeit (am Ort O in Abbildung 2.3) in seine x- und y-Komponente, also

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{e}_x + v_{0y}\,\vec{e}_y, \tag{2.18}$$

wobei

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \tag{2.19}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha \tag{2.20}$$

mit dem Abschusswinkel α. Die Vektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ sind die Einheitsvektoren entlang der x- bzw. y-Achse. Der Ortsvektor $\vec{r}$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ändern sich während des Projektilflugs kontinuierlich; die Beschleunigung bleibt konstant und vertikal zum Boden gerichtet. Insbesondere gibt es keine horizontale Beschleunigung. Wir halten fest, dass bei der Projektilbewegung die horizontale und vertikale Bewegung voneinander entkoppelt sind, d. h. keine der Bewegungen beeinflusst die andere. Infolgedessen lässt sich die zweidimensionale Bewegung in zwei eindimensionale Bewegungen aufspalten.

Wir analysieren zunächst die horizontale Bewegung entlang der x-Achse. Dazu nehmen wir an, dass die Anfangsposition bei x_0 sei. Dann gilt

$$x = x_0 + v_{0x}\,t = x_0 + v_0\,t\,\cos\alpha. \tag{2.21}$$

Bei der vertikalen Bewegung entlang der y-Achse müssen wir berücksichtigen, dass die Erdbeschleunigung das Projektil stets nach unten beschleunigt. Mit der Anfangsposition y_0 schreiben wir

$$y = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 = y_0 + v_0\,t\,\cos\alpha - \frac{1}{2}\,g\,t^2. \tag{2.22}$$

Die Geschwindigkeit entlang der y-Achse ändert sich wie folgt:

$$v_y = v_{0y} - g\,t = v_0\,\sin\alpha - g\,t. \tag{2.23}$$

In den Übungen werden diese allgemeinen Formeln für die Spezialfälle des vertikalen Wurfs ($\alpha = 90°$) und des horizontalen Wurfs ($\alpha = 0°$) angewendet.

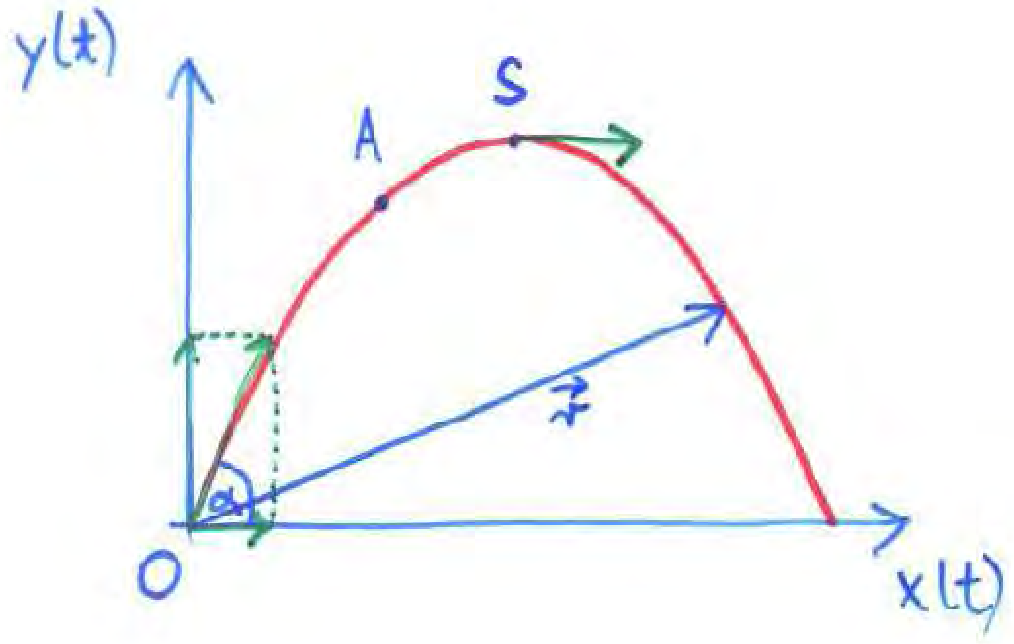

Abbildung 2.3: Schiefer Wurf und seine Zerlegung in zwei voneinander unabhängige eindimensionale Bewegungen.

2.1.4 Gleichförmige Kreisbewegung

Zum Schluss des Kapitels über Kinematik beschreiben wir noch die gleichförmige Kreisbewegung, bei der ein Massenpunkt sich auf einem Kreis oder Kreisbogen mit konstanter (gleichförmiger) Geschwindigkeit bewegt. Interessanterweise ist diese Bewegung eine beschleunigte, obwohl die Geschwindigkeit betraglich eine Konstante ist. Allerdings hatten wir als Beschleunigung die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit bezeichnet, und die Geschwindigkeit ist ein Vektor. In jedem Punkt der Kreisbahn ist aber die Richtung der Geschwindigkeit eine andere; infolgedessen liegt eine beschleunigte Bewegung vor. Die Beschleunigung bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist stets zum Mittelpunkt der Kreisbahn gerichtet und steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor. Man nennt sie Zentripetalbeschleunigung und kann sie vermöge

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{2.24}$$

berechnen. Hierin sind v die Geschwindigkeit des Teilchens und r der Radius der Kreisbahn. Da wir aus den bisherigen Abschnitten schon wissen, welche Strecke ein sich mit der Geschwindigkeit v bewegender Massenpunkt in einer gegebenen Zeit zurücklegt, können wir dieses Wissen auch auf die gleichförmige Kreisbewegung anwenden. Es ist naheliegend zu fragen, welche Zeit das Teilchen benötigt, um die Kreisbahn ein Mal zu durchlaufen. Diese Zeit nennt man Periodendauer und bezeichnet sie mit T. Die Strecke ist einfach der Umfang des Kreises, der sich über $2\,\pi\,r$ berechnet. Also erhalten wir für die Periodendauer

$$T = \frac{2\,\pi\,r}{v}. \tag{2.25}$$

Als Beispiel berechnen wir die Zentripetalbeschleunigung für einen Piloten, der mit seinem Düsenjet einen (als Kreis gedachten) Looping fliegt. Die Geschwindigkeit sei $2500\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und der Radius der Kreisbahn 5,8 km. Zunächst rechnen wir in SI-Einheiten um, d. h.

$$1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1\,\frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \tag{2.26}$$

also

$$2500\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 694\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

und

$$5{,}8\,\mathrm{km} = 5800\,\mathrm{m}.$$

Damit erhalten wir für die Zentripetalbeschleunigung

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(694\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{5800\,\mathrm{m}} \approx 83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 8{,}5\,g.$$

Die Zentripetalbeschleunigung ist also größer als das Achtfache der Erdbeschleunigung. Eine solche Belastung kann der menschliche Körper nur kurzzeitig aushalten, ohne ohnmächtig zu werden. Für einen Looping benötigt der Pilot die Zeit

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 5800\,\mathrm{m}}{694\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 53\,\mathrm{s}.$$

2.2 Dynamik

In diesem Kapitel gehen wir über die bloße Beschreibung von Bewegungen (siehe Kinematik) hinaus und fragen nach der Ursache der Bewegung. Aus dem Alltag wissen Sie, dass eine Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers (sei es der Betrag oder die Richtung) eine Ursache haben muss. Es gibt offenbar eine Wechselwirkung zwischen dem beschleunigten Körper und seiner Umgebung. Man nennt diese Wechselwirkung eine Kraft. Man sagt, dass die Kraft auf den Körper wirke und ihn beschleunige. Diesen Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung hat Isaac Newton (1642 - 1727) als Erster erkannt. Aus diesem Grund sprechen wir von der Newtonschen Mechanik. In diesem Abschnitt werden die dieser Mechanik zugrunde liegenden Newtonschen Axiome vorgestellt.

Als Randbemerkung notieren wir, dass die Newtonsche Mechanik nicht für alle Situationen gültig ist. Sind etwa die beteiligten Geschwindigkeiten sehr groß (größer als ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit), dann müssen wir die Newtonsche Mechanik durch Einsteins spezielle Relativitätstheorie ersetzen. Letztere gilt für alle Geschwindigkeiten. Will man Mechanik auf atomarer Skala verstehen, dann müssen wir die Newtonsche Mechanik durch die Quantenmechanik ersetzen. Die Newtonsche Mechanik ist also gewissermaßen ein Spezialfall dieser beiden allgemeineren Beschreibungen der Mechanik. Allerdings ist sie nach wie vor ein sehr wichtiger Spezialfall, den wir jetzt genauer untersuchen werden.

2.2.1 Newtons Erstes Gesetz

Denken Sie sich eine Welt ohne Reibung (auf letztere kommen wir noch genauer zu sprechen), dann werden Sie verstehen, dass ein einmal beschleunigter Körper seinen Zustand der gleichförmigen und geradlinigen Bewegung beibehalten wird. Auch ein anfangs ruhender Körper wird,

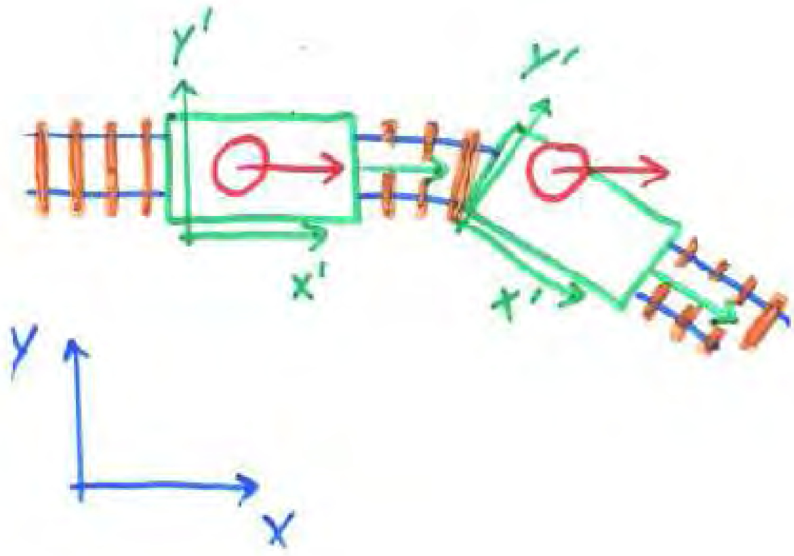

Abbildung 2.4: Trägheitsverhalten in der Bewegung. Wagen und Kugel werden vorsichtig auf gleiche Geschwindigkeit gebracht. Die Kugel behält im Raum ihre Geschwindigkeit bei. Das Laborsystem ist durch das Koordinatensystem xy und der Wagen durch das mitbewegte Bezugssystem $x'y'$ charakterisiert.

falls keine Kraft auf ihn einwirkt, diesen Zustand der Ruhe beibehalten. Damit können wir schon das erste Axiom von Newton formulieren.

> **Erstes Newtonsches Gesetz.** Falls keine Kraft auf einen Körper wirkt, dann kann sich die Geschwindigkeit des Körpers nicht ändern, d. h. er wird nicht beschleunigt. Mit anderen Worten: ohne Einwirkung einer äußeren Kraft behält der Körper den Zustand seiner Bewegung (Ruhe) bei.

Galilei hat schon vor Newton erkannt, dass im Falle der Abwesenheit von Reibung und Luftwiderstand ein Körper seinen Bewegungszustand beibehält. Dieses Vermögen eines Körpers, seinen Bewegungszustand beizubehalten, bezeichnet man als seine Trägheit.

> **Galileisches Trägheitsprinzip.** Ein sich selbst überlassener Körper bewegt sich ohne äußere Einwirkung geradlinig gleichförmig oder bleibt in Ruhe.

Interessanterweise hängt die Aussage, dass ein Körper sich nach dem Trägheitsprinzip bewegt, entscheidend vom Bezugssystem ab. Betrachten Sie dazu Abbildung 2.4, die eine Kugel auf einem durch eine Kurve fahrenden Wagen zeigt. Im ruhenden Bezugssystem, gegenüber dem sich der Wagen bewegt, gilt für die Kugel das Trägheitsprinzip. Auch bei der Beschleunigung des Wagens während der Kurvenfahrt rollt die Kugel anfänglich geradeaus weiter mit konstanter Geschwindigkeit. Im mit dem Wagen bewegten Bezugssystem urteilt ein mitfahrender Beobachter, dass während der Kurvenfahrt die Kugel sich nicht mehr nach dem Trägheitsprinzip verhält. Diese unterschiedlichen Sichtweisen auf ein und denselben Vorgang motivieren die Einteilung der Bezugssysteme in solche, in denen für frei bewegliche Körper das Trägheitsprinzip gilt, und in solche, in denen dieses Prinzip nicht gilt. Erstere Bezugssysteme nennt man Inertialsysteme. Es gibt unendlich viele Inertialsysteme, nämlich jedes Bezugssystem ist ein Inertialsystem, das sich relativ zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit (konstant nach Betrag und Richtung) bewegt.

Galileisches Relativitätsprinzip. Es gibt unendlich viele gleichberechtigte Inertialsysteme. Mit keinem Experiment der Mechanik lässt sich feststellen, ob ein Inertialsystem in Ruhe oder Bewegung ist.

2.2.2 Newtons Zweites Gesetz

Wir wissen nun, dass eine auf einen Körper einwirkende Kraft seinen Bewegungszustand verändert. Zu Beginn des Abschnitts über Kinematik hatten wir präzisiert, dass Bewegung die Änderung des Ortes bedeutet. Damit können wir die Änderung der Bewegung durch eine Beschleunigung charakterisieren. Im Zweiten Newtonschen Gesetz werden Kraft und Beschleunigung zueinander in Beziehung gesetzt.

Zweites Newtonsches Gesetz. Die resultierende Kraft auf einen Körper ist das Produkt aus seiner Masse m und der Beschleunigung $\vec{a}$ des Körpers, also

$$\vec{F}_{\mathrm{ges}} = m\,\vec{a}. \tag{2.27}$$

Obige Gleichung ist eine Vektorgleichung, d. h. sie gilt für alle drei Komponenten:

$$F_{\mathrm{ges},x} = m\,a_x \quad F_{\mathrm{ges},y} = m\,a_y \quad F_{\mathrm{ges},z} = m\,a_z. \tag{2.28}$$

Wir halten fest, dass die Beschleunigungskomponente entlang einer gegebenen Achse nur durch solche Kräfte verursacht wird, die entlang dieser Achse eine nichtverschwindende Komponente besitzen. Die SI-Einheit der Kraft ist

$$[F] = 1\,\mathrm{Newton} = 1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{2.29}$$

Eine Ansammlung von zwei oder mehreren Körpern nennen wir ein System. Jede Kraft, die auf Körper innerhalb des Systems von Körpern außerhalb des Systems einwirkt, nennt man äußere Kraft. Innere Kräfte werden solche Kräfte genannt, die zwischen zwei Körpern innerhalb des Systems wirken.

Neben der Kraft tritt im Zweiten Newtonschen Gesetz die Masse m des Körpers auf. Die Größe der Masse ist ein Maß für die Trägheit des Körpers. Die SI-Einheit ist das Kilogramm:

$$[m] = 1\,\mathrm{kg}. \tag{2.30}$$

Sie wissen bereits, dass man Massen mit Hilfe von Waagen bestimmen kann. Heutzutage sind Messungen im Bereich von $10^{-14}\,\mathrm{kg}$ bis $10^{7}\,\mathrm{kg}$ ausführbar. Durch Frequenzänderungen eines schwingenden Quarzes, dessen Oberfläche mit Atomen oder Molekülen belegt wird, kann man Massen sogar bis zu $20\,\mathrm{pg}$ bestimmen. Wir werden neben diesen statischen Messungen von Massen später auch sogenannte dynamische Messungen kennenlernen, die von der noch zu besprechenden Impulserhaltung Gebrauch machen.

2.2.3 Newtons Drittes Gesetz

Stellen Sie sich vor, dass Sie (A) und Ihr Kollege (B) auf Rollschuhen stehen und jeweils ein Ende desselben, zwischen Ihnen gespannten Seils in der Hand haben. Nun ziehe A am Seil mit der Kraft $\vec{F}_{\mathrm{AB}}$, dann finden Sie, dass A sich auf B zubewegt. Gleichzeitig beginnt aber auch B loszurollen und sich auf A zuzubewegen. Dies kann man nur so erklären, dass mit der Kraft $\vec{F}_{\mathrm{AB}}$ immer auch eine Kraft wirken muss, die gleich groß wie $\vec{F}_{\mathrm{AB}}$ und ihr entgegengesetzt ist. Dies ist der Inhalt des Dritten Newtonschen Axioms.

> **Drittes Newtonsches Gesetz.** Wenn zwei Körper A und B miteinander wechselwirken, dann sind die aufeinander wirkenden Kräfte entgegengesetzt gleich groß, also
>
> $$\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BA}} \quad (\text{actio} = \text{reactio}). \tag{2.31}$$

Die Kräfte $\vec{F}_{\mathrm{AB}}$ und $\vec{F}_{\mathrm{BA}}$ sind ein Paar zusammengehöriger Wechselwirkungskräfte. Solche Wechselwirkungskräfte greifen nie an ein und demselben Körper an. Man darf die Wechselwirkungskräfte nicht mit sogenannten Kompensationskräften verwechseln. Letztere können eine vorgegebene Kraft durch Angreifen am *selben* Körper kompensieren. In diesem Zusammenhang wollen wir kurz zwischen inneren und äußeren Kräften unterscheiden. Die inneren Kräfte zwischen den Körpern eines Systems halten sich bezüglich des Systems das Gleichgewicht. Denn gemäß dem Dritten Newtonschen Gesetz gehört zur Kraft auf irgendeinen Körper des Systems immer die entgegengesetzt gleiche Wechselwirkungskraft auf einen anderen Körper des Systems. Die Bewegung des Systems als Ganzes wird durch die äußeren Kräfte bestimmt. Letztere sind Kräfte, die zwar an Körpern des Systems angreifen, deren Wechselwirkungskräfte (Gegenkräfte) aber auf Körper wirken, die nicht zum System gehören. Die Resultierende der äußeren Kräfte bewirkt die Bewegung des Schwerpunktes, wenn man von Drehungen und Verformungen des Systems absieht.

2.2.4 Eine Anwendung der Newtonschen Gesetze: Die schiefe Ebene

Betrachten Sie die Abbildung 2.5. Ein Körper der Masse m stehe auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel $\alpha = 27°$. Wir wollen wieder annehmen, dass die Reibung hinreichend klein ist. Der Klotz wird durch ein gespanntes Seil am Rutschen gehindert, d. h. er verharrt in Ruhe. Wir fragen, wie groß die Beträge der eingezeichneten Kr̈afte $\vec{F}_{\mathrm{g}}$, $\vec{N}$ und $\vec{F}$ sind. Die Kraft $\vec{F}_{\mathrm{g}}$ ist die sogenannte Gewichtskraft und hat den Betrag

$$|\vec{F}_{\mathrm{g}}| = F_{\mathrm{g}} = m\,g. \tag{2.32}$$

Die Kräfte $\vec{F}$ und $\vec{N}$ haben die besonderen Bezeichnungen Hangabtriebskraft beziehungsweise Normalkraft erhalten. Während der bildliche Name der Hangabtriebskraft selbst erklärend ist, bedarf die Normalkraft einiger Worte. Stellen Sie sich auf eine Matratze, dann sehen Sie, dass sie sich aufgrund Ihrer Gewichtskraft eindellt. Dadurch drückt Sie die Matratze nach oben und verhindert, dass Sie fallen - Sie bleiben im Gleichgewicht. Diese Kraft, die von der Matratze auf Sie wirkt, nennt man Normalkraft $\vec{N}$. Darin bedeutet normal, dass die Kraft senkrecht zur Unterlage steht. Wir halten fest:

> Wenn ein Körper auf einer Oberfläche steht, dann verformt sich diese Oberfläche und übt ein Kraft auf den Körper aus, die senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist. Diese Kraft heißt Normalkraft und wird mit $\vec{N}$ bezeichnet.

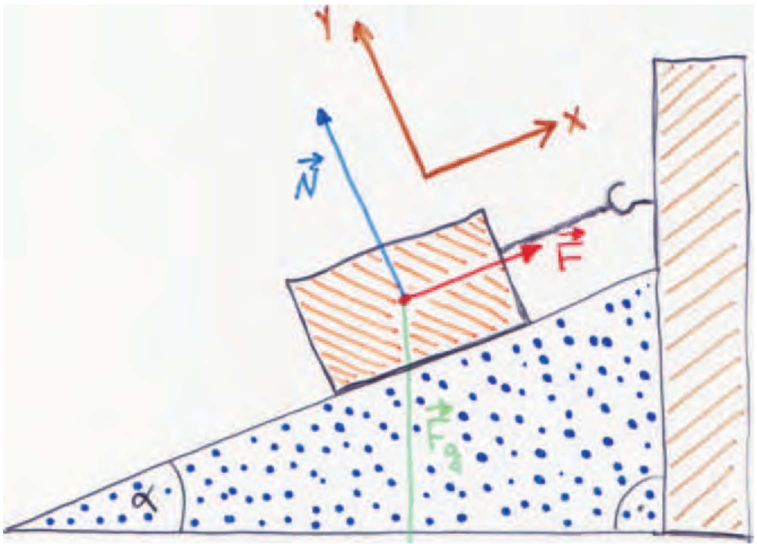

Abbildung 2.5: Schiefe Ebene. Ein Körper werde durch ein gespanntes Seil vom Rutschen auf einer als reibungslos angenommenen geneigten Ebene gehindert.

Man findet, dass die Normalkraft den gleichen Betrag der Gewichtskraft besitzt:

$$|\vec{N}| = N = m\,g = F_{\mathrm{g}} = |\vec{F}_{\mathrm{g}}|. \tag{2.33}$$

Wir wenden jetzt das Zweite Newtonsche Gesetz an und schreiben

$$\vec{F}_{\mathrm{ges}} = m\,\vec{a} = \vec{F}_{\mathrm{g}} + \vec{N} + \vec{F}. \tag{2.34}$$

Da der Körper ruht, gilt $\vec{a} = 0$, d. h.

$$0 = \vec{F}_{\mathrm{g}} + \vec{N} + \vec{F}. \tag{2.35}$$

Diese Vektorgleichung lösen wir nun komponentenweise. Dazu verwenden wir das eingezeichnete Koordinatensystem. Aus der Abbildung können Sie ablesen, dass die x- und y-Komponente der Gravitationskraft $\vec{F}_{\mathrm{g}}$ sich wie folgt ausrechnen lassen (beachten Sie das negative Vorzeichen):

$$F_{\mathrm{g},x} = -m\,g\,\sin\alpha \tag{2.36}$$

$$F_{\mathrm{g},y} = -m\,g\,\cos\alpha. \tag{2.37}$$

$$\tag{2.38}$$

Die Kräfte $\vec{F}$ und $\vec{N}$ sind entlang der x- bzw. y-Achse gerichtet; damit erhält man also entlang x:

$$0 = -m\,g\,\sin\alpha + F \Leftrightarrow F = m\,g\,\sin\alpha \tag{2.39}$$

und entlang y:

$$0 = -m\,g\,\cos\alpha + N \Leftrightarrow N = m\,g\,\cos\alpha. \tag{2.40}$$

Jetzt schneiden wir das Seil durch und fragen, mit welcher Beschleunigung der Körper die schiefe Ebene hinabfährt. Entlang der y-Achse wird der Körper nicht beschleunigt, da die Normalkraft der y-Komponente der Gravitationskraft nach wie vor die Waage hält. Entlang der x-Achse hingegen wirkt jetzt die x-Komponente der Gravitationskraft auf den Körper und führt zur Beschleunigung, die man mit dem Zweiten Newtonschen Gesetz berechnen kann:

$$m\,a = F_{\mathrm{g},x} = -m\,g\,\sin\alpha \Leftrightarrow a = -g\,\sin\alpha. \tag{2.41}$$

Eingesetzt ergibt dies

$$a = -9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times \sin(27°) \approx -4{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

2.2.5 Das Gesetz von Hooke

In der Vorlesung haben Sie einen Federkraftmesser kennen gelernt. Dieser beruht auf der experimentellen Erkenntnis, dass die Ausdehnung der Feder proportional zur an ihr angreifenden Kraft ist. Nennt man die Kraft wie gewohnt $\vec{F}$ und die Auslenkung $\vec{s}$ dann gilt:

> **Hookesches Gesetz.** Sei $\vec{s}$ die Deformation der Feder (also die Dehnung oder Stauchung relativ zur normalen Länge der Feder), dann ist die Federkraft gegeben durch
>
> $$\vec{F} = -k\,\vec{s}. \tag{2.42}$$

Das Minuszeichen zeigt, dass die Federkraft stets der Deformation entgegenwirkt. Die Konstante k heißt die Feder- oder Kraftkonstante. Sie ist für jede Feder verschieden und beschreibt deren Steifigkeit; je größer k ist, desto steifer ist die Feder. Die Einheit der Federkonstante ist

$$[k] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}. \tag{2.43}$$

Beachten Sie, dass das Gesetz von Robert Hooke einen begrenzten Gültigkeitsbereich besitzt. Sind etwa die auf die Feder wirkenden Kräfte zu groß, dann verformt sich die Feder irreversibel oder reißt sogar.

Als Beispiel zum Hookeschen Gesetz fragen wir, welche Federkonstante eine Feder besitzt, wenn eine Masse von 500 g auf dem Mars diese Feder um 7,6 cm dehnt? Die Gewichtskraft von $G = m\,g$ dehnt die Feder, wobei wir beachten müssen, dass wir den Ortsfaktor für den Mars verwenden, also $g = 3{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Nach dem Hookeschen Gesetz gilt: $G = k\,s$. Lösen wir die Gleichung nach der gesuchten Federkonstanten auf, dann erhalten wir:

$$k = \frac{G}{s} = \frac{m\,g}{s} = \frac{0{,}5\,\mathrm{kg} \times 3{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{7{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 25\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}. \tag{2.44}$$

2.2.6 Reibung

Die Reibung ist ein stets anwesendes Phänomen. Ohne die Möglichkeit, der Reibung entgegenzuwirken, würden alle Bewegungen schließlich zum Stillstand kommen. Man hat ausgerechnet, dass 20 % des Benzins in einem Automobiltank dafür verwendet werden, um der Reibung im Motor und im Fahrgestell entgegenzuwirken. Andererseits: ohne Reibung könnten wir uns nicht bewegen, Nägel und Schrauben wären nutzlos, Knoten hielten nicht, usw. Wir betrachten im Folgenden Reibungskräfte, die zwischen trockenen festen Flächen herrschen. Was können wir über solche mit Hilfe unserer Erfahrung und den Newtonschen Gesetzen aussagen?

- Lassen Sie etwa ein Buch über einen Tisch gleiten, dann wird das Buch nach kurzer Zeit liegen bleiben. Dies bedeutet aber getreu Newton, dass eine Kraft vorhanden sein muss, die den Bewegungszusand des Buches verändert. Die Kraft muss parallel zur Grenzfläche zwischen Buch und Tisch und entgegengesetzt zum Geschwindigkeitsvektor des Buches wirken.
- Bewegen Sie das Buch, so dass es mit konstanter Geschwindigkeit über den Tisch rutscht. Ist Ihre Kraft die einzige, die auf das Buch wirkt? Das kann nicht sein, denn sonst würde es gemäß Newton beschleunigen. Infolgedessen muss eine weitere Kraft derart wirken, dass sie Ihrer Kraft entgegengesetzt gleich groß ist.
- Versuchen Sie jetzt, einen schweren Wohnzimmerschrank zu verschieben. Obwohl Sie eine große Kraft ausüben, bewegt sich der Schrank nicht. Immer wirkt Ihnen eine Kraft entgegen, die gleich groß ist wie Ihre - der Schrank rührt sich nicht. Mit größter Anstrengung überwinden Sie das Maximum der Reibungskraft, und der Schrank beginnt zu gleiten.

Solange wir Kraft auf einen Körper ausüben, der trotzdem ruhen bleibt, dann sprechen wir von statischer oder Haftreibungskraft $\vec{F}_\mathrm{h}$. Die Kraft, die wir auf einen Körper ausüben, um ihn mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, nennt man kinetische Reibungskraft $\vec{F}_\mathrm{k}$ (hierunter fallen die Gleit- und Rollreibungskraft, F_gl bzw. F_r). Wir fassen die Eigenschaften der Reibungskraft zusammen:

Eigenschaft 1. Bewegt sich der Körper nicht, dann sind statische Reibungskraft (Haftreibung) $\vec{F}_\mathrm{h}$ und beschleunigende Kraftkomponente parallel zur Gleitfläche entgegengesetzt gleich groß.

Eigenschaft 2. Der maximale Wert der statischen Reibungskraft $F_\mathrm{h,max}$ ist gegeben durch

$$F_\mathrm{h,max} = \mu_\mathrm{h}\, F_\mathrm{N}, \tag{2.45}$$

wobei μ_h der Haftreibungskoeffizient und F_N die schon bekannte Normalkraft sind. Wird $F_\mathrm{h,max}$ überschritten, dann beginnt der Körper zu gleiten.

Eigenschaft 3. Gleitet der Körper, dann muss eine Kraft aufgebracht werden, um den Körper mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen. Die Kraft ist die kinetische Reibungskraft (Gleitreibung) und besitzt den Wert

$$F_\mathrm{gl} = \mu_\mathrm{gl}\, F_\mathrm{N}, \tag{2.46}$$

worin μ_gl der Gleitreibungskoeffizient ist.

Beachten Sie, dass obige Gleichungen keine Vektorgleichungen sind: die Reibungskräfte sind stets der Bewegung entgegengerichtet und wirken parallel zur Grenzfläche zwischen Körper und Unterlage. Die Normalkraft ist bekanntlich senkrecht zur Oberfläche gerichtet. Die Reibungskoeffizienten μ_h and μ_gl sind dimensionslose Zahlen und müssen experimentell bestimmt werden. Insbesondere unterscheiden sie sich für unterschiedliche Grenzflächen (etwa Stahl auf Eis oder Stahl auf Beton).

Ein Beispiel aus dem Alltag soll das eben Geschilderte illustrieren. Ein Auto vollführe eine Vollbremsung und hinterlasse eine Bremsspur von 290 m Länge. Wie schnell war es zu Beginn der Vollbremsung? Der Gleitreibungskoeffizient von Gummi auf Beton ist $\mu_\mathrm{gl} = 0{,}60$. Zur Lösung der Aufgabe betrachten wir die Vollbremsung als eine beschleunigte (verzögerte) Bewegung, bei der $a = \text{const}$ gilt, d. h.

$$\text{const} = a = \langle a \rangle = \frac{v - v_0}{\Delta t}.$$

Die Geschwindigkeitsänderung startet von der gesuchten Anfangsgeschwindigkeit v_0 und endet beim Stillstand, also $v = 0$. Die Zeit Δt für den Bremsvorgang ist unbekannt. Das Weg-Zeit-Gesetz finden wir mittels

$$x - x_0 = \langle v \rangle \, \Delta t$$

und

$$\langle v \rangle = \frac{v + v_0}{2}.$$

Wir haben dann

$$x - x_0 = \frac{v + v_0}{2} \, \frac{v - v_0}{a} \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 + 2\, a\, (x - x_0). \tag{2.47}$$

Die Beschleunigung a erhalten wir aus dem Zweiten Newtonschen Gesetz, wenn wir ansetzen, dass die Gleitreibungskraft die Geschwindigkeit des Autos verändert, also

$$F_{\text{ges}} = m\, a = -\mu_{\text{gl}}\, N = -\mu_{\text{gl}}\, m\, g \Leftrightarrow a = -\mu_{\text{gl}}\, g,$$

wobei das Minuszeichen bedeutet, dass die Reibungskraft der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Schließlich erhalten wir für die Anfangsgeschwindigkeit v_0:

$$\begin{aligned} v_0^2 &= -2\, a\, (x - x_0) \\ &= -2\, (-\mu_{\text{gl}}\, g)\, (x - x_0) \\ &= 2\, \mu_{\text{gl}}\, g\, (x - x_0) \end{aligned} \tag{2.48}$$

und damit

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2\, \mu_{\text{gl}}\, g\, (x - x_0)} \\ &= \sqrt{2 \times 0{,}60 \times 9{,}8\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 290\, \text{m}} \\ &\approx 58\, \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

2.2.7 Antriebs- und Fahrtwiderstände

Fahrzeuge bewegen sich, weil der Antriebskraft F_{A} als Wechselwirkungskraft die gleich große Haftreibungskraft F_{h} zwischen Rad und Fahrbahn entgegenwirkt. Die Antriebsräder üben auf die Fahrbahn die Antriebskraft F_{A} aus, als Gegenkraft treibt die Fahrbahn mit der Haftreibungskraft F_{h} auf die Antriebsräder das Fahrzeug an. Die (wirksame) Antriebskraft F_{A}, die vom Motor auf die Räder übertragen wird, kann höchstens gleich der maximalen Haftreibungskraft $F_{\text{h,max}}$ sein. Damit werden Beschleunigungsvermögen und Steigfähigkeit durch $F_{\text{h,max}}$ begrenzt; eine größere Kraft kann durch das Rad nicht auf die Fahrbahn übertragen werden. Bei einer Vollbremsung (Blockierung der Räder) ist die Reibung zwischen Reifen und Straße stark herabgesetzt (Gleitreibung statt Haftreibung).

Die (wirksame) Antriebskraft F_{A} ist gleich der Summe der Fahrtwiderstandskräfte. Die Rollreibungskraft $F_{\text{r}} = \mu_{\text{r}} F_{\text{N}}$ ist proportional zur Normalkraft auf die Achsen. Bei guten Reifen und normaler Straße ist $\mu_{\mathrm{gl}} = 0{,}01 - 0{,}03$. Die Luftwiderstandskraft F_{L} eines Fahrzeugs ist proportional dem Luftwiderstandsbeiwert c_{W} (zwischen 0,3 und 0,4 bei heutigen Fahrzeugen), der Querspannfläche A des Fahrzeugs, der Dichte ϱ der Luft und dem Quadrat der Geschwindigkeit v:

$$F_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} c_{\mathrm{W}} A \varrho v^2. \tag{2.49}$$

Die Querspannfläche ergibt sich aus der Projektion des Fahrzeugs auf eine Ebene senkrecht zur Fahrtrichtung (bei einem Personenkraftwagen liegt sie bei etwa $1{,}7 - 2{,}0\,\mathrm{m}^2$). Fährt das Fahrzeug bergauf, so ist außerdem die Steigungswiderstandskraft $F_{\mathrm{st}} = mg \sin\alpha$ zu berücksichtigen (α ist der Neigungswinkel). Beschleunigt das Fahrzeug zusätzlich, so muss man zur Antriebskraft die Beschleunigungswiderstandskraft hinzufügen. Sie hat die Größe $F_{\mathrm{B}} = \lambda m a$, wobei λ die Trägheit aller rotierenden Teile (etwa im Motor) berücksichtigt. Es gilt also

$$F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{r}} + F_{\mathrm{L}} + F_{\mathrm{st}} + F_{\mathrm{B}}. \tag{2.50}$$

2.2.8 Zentripetalkraft

Wir haben weiter oben gesehen, dass für eine Kreisbewegung eine Beschleunigung, die zum Mittelpunkt der Kreisbahn weist, nötig ist. Nach dem Zweiten Newtonschen Axiom erfährt ein Körper der Masse m, der mit der gleichförmigen Geschwindigkeit eine Kreisbahn mit Radius r beschreibt, die zum Kreismittelpunkt gerichtete Zentripetalkraft

$$F_{\mathrm{z}} = m\,\frac{v^2}{r}. \tag{2.51}$$

Bei der Kurvenfahrt eines Autos ($m = 1000\,\mathrm{kg}$) mit der Geschwindigkeit $v = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf einer Kreisbahn mit Radius $r = 200\,\mathrm{m}$ wirkt also die Zentripetalkraft

$$F_{\mathrm{z}} = 1000\,\mathrm{kg} \times \frac{\frac{72}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{200\,\mathrm{m}} = 2000\,\mathrm{N}. \tag{2.52}$$

Sofort stellt sich die Frage nach der Bereitstellung dieser Kraft. Sie vermuten richtig: Es ist die Haftreibungskraft zwischen den Reifen des Fahrzeugs und dem Straßenbelag. Genauer:

$$F_{\mathrm{z}} = F_{\mathrm{h}} \Leftrightarrow m\,\frac{v^2}{r} = \mu_{\mathrm{h}} m g. \tag{2.53}$$

Die Zentripetalkraft darf höchstens so groß sein wie die Haftreibungskraft ($F_{\mathrm{z}} \leq F_{\mathrm{h}}$); anderenfalls beginnt das Fahrzeug zu gleiten und mithin tangential aus der Bahn auszubrechen. Für die Geschwindigkeit muss also gelten:

$$v \leq \sqrt{\mu_{\mathrm{h}} g r}. \tag{2.54}$$

Die Haftreibungszahlen für Autoreifen auf trockener, nasser oder vereister Fahrbahn lauten etwa 0,65, 0,4 bzw. 0,1. Für dieselbe Kurve sollten Sie also die Geschwindigkeit Ihres Autos den Straßenverhältnissen anpassen.

Sind Kurvenfahrten in einer reibungsfreien Welt unmöglich? Nein. Man muss sich allerdings einen Trick überlegen, um die Zentripetalkraft aufzubringen. Abbildung 2.6 zeigt Ihnen den Trick überhöhter Kurven. Gewichtskraft ($\vec{G}$) und Normalkraft ($\vec{N}$) des Bodens auf das Fahrzeug bringen als Resultierende die Zentripetalkraft (F_{z}) auf; es gilt:

$$\frac{F_{\mathrm{z}}}{G} = \frac{v^2}{rg} = \tan\alpha, \tag{2.55}$$

worin α den Winkel für die überhöhte Kurve bedeutet.

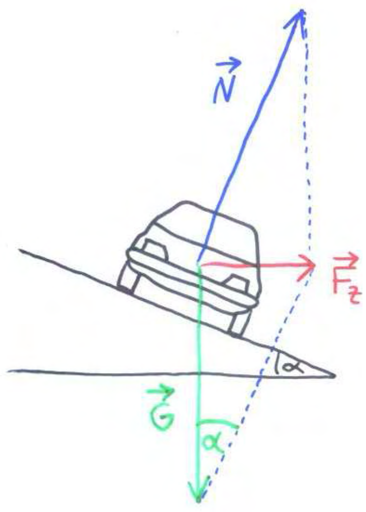

Abbildung 2.6: Überhöhte Kurve und Kräftebilanz.

2.2.9 Planetenbewegung

In guter Näherung beschreibt unser Mond eine Kreisbahn um die Erde. Ihr Radius ist $r = 384000\,\mathrm{km}$, die Umlaufdauer beträgt 27,322 d. Für diese Kreisbahn wird eine Zentripetalkraft benötigt - woher stammt diese? Diese Frage hat sich auch Isaac Newton gestellt und beantwortet: Es ist dieselbe Kraft, die einen Apfel vom Baum zu Boden fallen lässt. Wir nennen diese Kraft die Gravitations- oder Massenanziehungskraft. Folgende Überlegung bringt uns die Abstandsabhängigkeit dieser Kraft: Die Gewichtskraft eines Apfels der Masse $m = 100\,\mathrm{g}$ beträgt auf der Erdoberfläche, wie Sie schon längst wissen, $G = mg = 0{,}98\,\mathrm{N}$. Ein Astronaut verliert diesen Apfel just auf der Mondbahn, wo die Zentripetalkraft

$$F_\mathrm{z} = m\,\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 0{,}1\,\mathrm{kg} \times 384 \times 10^6\,\mathrm{m}}{(27{,}322 \times 24 \times 60^2\,\mathrm{s})^2} = 0{,}000272\,\mathrm{N} \tag{2.56}$$

von der Gravitationskraft zwischen Apfel und Erde aufgebracht wird. Damit wissen wir, dass die Gravitationskraft auf der Erdoberfläche (der Radius der Erde beträgt $R = 6370\,\mathrm{km}$) von 0,98 N auf den 60^2ten Teil, nämlich 0,000272 N, reduziert wird, falls der Abstand 60fach so groß ist ($384000\,\mathrm{km} \approx 60 \times 6370\,\mathrm{km}$). Wir vermuten daher, dass

$$F \propto \frac{1}{r^2}, \tag{2.57}$$

worin r den Abstand der Massenpunkte bezeichnet. Man findet weiter den naheliegenden Zusammenhang, dass die Gravitationskraft den Massen der beiden Körpern, zwischen denen sie wirkt, proportional ist. Damit lautet das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$F = \gamma \frac{m\,M}{r^2}, \tag{2.58}$$

worin γ die Gravitationskonstante mit dem Wert

$$\gamma = 6{,}672 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \tag{2.59}$$

ist.

Mit diesem Gesetz können wir beispielsweise die Masse der Erde bestimmen. Dazu brauchen wir nur die Gewichtskraft eines Körpers der Masse m auf der Erdoberfläche zu kennen. Diese ist bekanntlich $G = mg$ und identisch mit der Gravitationskraft zwischen der Erde und diesem Körper. Also können wir schreiben:

$$F = \gamma \frac{m\,M}{R^2} = mg \Leftrightarrow M = \frac{g\,R^2}{\gamma} = \frac{9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times (6370000\,\mathrm{m})^2}{6{,}672 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}} \approx 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}. \tag{2.60}$$

2.3 Arbeit und Energie

Wir definieren zunächst den Begriff der mechanischen Arbeit.

Mechanische Arbeit. Wir verrichten (mechanische) Arbeit, wenn wir einen Körper unter Aufwendung einer Kraft verschieben. Nur diejenige Kraftkomponente ist wirksam, die parallel zur Verschiebung gerichtet ist. Die zur Verschiebung senkrechte Komponente der Kraft verrichtet keine Arbeit. Mathematisch formuliert ist die mechanische Arbeit W also das Skalarprodukt aus Kraft $\vec{F}$ und Verschiebung $\vec{s}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}. \tag{2.61}$$

Die Einheit der Arbeit ist das Joule:

$$[W] = 1\,\mathrm{Joule} = 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}. \tag{2.62}$$

Schließen Kraft und Verschiebung den Winkel α miteinander ein, so können wir für die Arbeit auch schreiben

$$W = F\,s\,\cos\alpha. \tag{2.63}$$

Beachten Sie, dass obige Definition der Arbeit nur für konstante Kräfte und sogenannte starre Körper gilt. Bei letzteren bewegen sich alle Bestandteile immer als Ganzes.

Wir fragen nun, was die Verrichtung mechanischer Arbeit an einem Körper bewirkt. Gemäß dem Zweiten Newtonschen Gesetz ($\vec{F} = m\,\vec{a}$) bewirkt eine konstante Kraft eine konstante Beschleunigung. Letztere können wir aber beschreiben durch $a = \frac{v}{\Delta t}$, worin v die Endgeschwindigkeit bezeichne, die der Körper nach der Beschleunigung aus der Ruhe ($v = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) in der Zeit Δt erhält. Auch die zurückgelegte Strecke können wir berechnen, nämlich

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\,a\,(\Delta t)^2 \\ &= \frac{1}{2}\,v\,\Delta t, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung lediglich die Beschleunigung ersetzt haben. Damit erhalten wir für die Arbeit (wir nehmen an, dass die Kraft entlang des Weges zeige)

$$W = F\,s = m\,\frac{v}{\Delta t} \times \frac{1}{2}\,v\,\Delta t = \frac{1}{2}\,m\,v^2. \tag{2.64}$$

Dieses Ergebnis gibt Anlass zu einer Definition.

Kinetische Energie. Ein Körper der Masse m und der Geschwindigkeit v (die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein möge) besitzt die kinetische Energie

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\, m\, v^2. \tag{2.65}$$

Damit können wir sagen, dass die Verrichtung einer mechanischen Arbeit die Veränderung der kinetischen Energie bedeuten kann. Insbesondere sind Arbeit und Energie äquivalente Begriffe. Der Zusammenhang zwischen mechanischer Arbeit und kinetischer Energie ist ein allgemeiner, den wir nur der Einfachheit halber am Spezialfall der gleichförmig beschleunigten Bewegung hergeleitet haben. Es gilt allgemein:

Seien $W_{\mathrm{kin},1}$ und $W_{\mathrm{kin},2}$ die kinetischen Energien zu Beginn und am Ende der Verrichtung mechanischer Arbeit W, dann gilt

$$\Delta W_{\mathrm{kin}} = W_{\mathrm{kin},2} - W_{\mathrm{kin},1} = W. \tag{2.66}$$

Die mechanische Arbeit wird also vollständig umgesetzt in kinetische Energie - keine Energie geht verloren. Sie bemerken, dass sich ein allgemeiner Erhaltungssatz der Energie ankündigt.

Bevor wir aber einen allgemeinen Energieerhaltungssatz formulieren, wollen wir sehen, welche Energie im Gravitationsfeld und in einer Feder steckt. Betrachten wir zunächst den freien Fall. Gravitationskraft und Verschiebung sind zueinander parallel, also $\alpha = 0°$. Die mechanische Arbeit, die die Gravitationskraft am fallenden Körper verrichtet, ist also

$$W = \vec{F}_{\mathrm{g}} \cdot \vec{s} = m\, g\, s. \tag{2.67}$$

Diese Gleichung gibt wieder Anlass zu einer Definition.

Potentielle Energie. Als potentielle oder Lage-Energie eines Körpers bezeichnen wir die Energie, die ein Körper im Gravitationsfeld besitzt. Die Position, an der die potentielle Energie verschwindet (Nullniveau), kann man willkürlich wählen. Befindet sich der Körper in der Höhe h über dem Nullniveau, dann ist seine potentielle Energie gegeben durch

$$W_{\mathrm{pot}} = m\, g\, h. \tag{2.68}$$

Erinnern Sie sich an die Tomate, die vom Eiffel-Turm fällt. Wir legen das Nullniveau auf den Boden. Auf dem höchst erreichbaren Plateau des Turms der Höhe h besitzt die Tomate die potentielle Energie $W_{\mathrm{pot},1} = m\, g\, h$; auf dem Boden (Nullniveau) gilt $W_{\mathrm{pot},2} = 0$. Oben ist die kinetische Energie $W_{\mathrm{kin},1} = 0$, während sie kurz vor dem Aufschlag die Größe $W_{\mathrm{kin},2} = \frac{1}{2}\, m\, v^2$ besitzt. Wir können sagen, dass sich die potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt hat. Dies gilt für jeden Augenblick des freien Falls der Tomate, also

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{kin},1} + W_{\mathrm{pot},1} &= W_{\mathrm{kin},2} + W_{\mathrm{pot},2} && (2.69)\\ \Leftrightarrow W_{\mathrm{kin}} + W_{\mathrm{pot}} &= \mathrm{const.} && (2.70) \end{aligned}$$

Zu jedem Zeitpunkt des freien Falls ist also die Summe aus kinetischer und potentieller Energie erhalten.

Sie kennen schon das Gesetz von Robert Hooke, das die Dehnung und Stauchung von Federn beschreibt. Auch in gedehnten und gestauchten Federn steckt potentielle Energie. Beachten Sie aber, dass die Federkraft sich mit der Größe der Deformation ändert - sie ist also keine konstante Kraft. Letzterer Umstand führt uns auf eine allgemeinere Definition der mechanischen Arbeit.

Mechanische Arbeit. Als mechanische Arbeit definiert man das Weg-Integral einer Kraft $\vec{F}(\vec{s})$, also

$$W = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}(\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s}. \tag{2.71}$$

Hierin sind $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ die Ortsvektoren der Anfangs- und Endpositionen, zwischen denen die mechanische Arbeit verrichtet wird.

Für die Feder haben wir $F(s) = -k\,s$ und damit

$$\begin{aligned} W &= \int_{s_1}^{s_2} -k\,s\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\,k\,s_1^2 - \frac{1}{2}\,k\,s_2^2. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Diese Gleichung gibt wieder Anlass zu einer Definition.

Elastische potentielle Energie. Als elastische potentielle Energie einer gespannten oder gestauchten Feder versteht man die Größe

$$W_\mathrm{s} = \frac{1}{2}\,k\,s^2. \tag{2.73}$$

Zum Schluss des Abschnitts über Arbeit und Energie definieren wir noch den Begriff der Leistung.

Mittlere Leistung. Unter der mittleren Leistung $\langle P\rangle$ versteht man die je Zeitintervall Δt verrichtete Arbeit ΔW, also

$$\langle P\rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{2.74}$$

Momentane Leistung. Die momentane Leistung P ist definiert als

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{2.75}$$

Die Einheit der Leistung ist das Watt:

$$[P] = \mathrm{Watt} = \mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}. \tag{2.76}$$

Ihre Stromabrechnung enthält häufig den Verbrauch in Kilowattstunden. Jetzt wissen Sie, dass diese Angabe den Verbrauch der Energie bezeichnet, denn es gilt

$$\Delta W = \langle P\rangle \times \Delta t.$$

Ein Verbrauch von einer Kilowattstunde bedeutet also den Verbrauch von

$$1\,\mathrm{kW\,h} = 1000\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \times 3600\,\mathrm{s} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}.$$

Zum Lösen von Übungsaufgaben benötigt man häufig noch eine andere Formulierung der momentanen Leistung. Stellen Sie sich mal wieder einen Körper vor, der von einer konstanten Kraft beschleunigt wird. Welche Leistung erbringt die beschleunigende Kraft? Es gilt:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{F}\cdot\vec{s} \\ &= \vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} \\ &= \vec{F}\cdot\vec{v}. \end{aligned} \tag{2.77}$$

2.4 Erhaltungssatz der Energie

Im vorigen Abschnitt haben wir die Begriffe der mechanischen Arbeit, der kinetischen Energie, der potentiellen Energie im Gravitationsfeld und der elastischen potentiellen Energie einer gespannten Feder kennengelernt. Wir haben außerdem das Gefühl bekommen, dass sich all diese Energieformen ineinander umwandeln lassen, und zwar ohne Verlust, d. h. unter Beibehaltung der Gesamtenergie. Diesen Erhaltungssatz der Energie werden wir in diesem Abschnitt formulieren.

Dazu unterscheiden wir zunächst konservative und nichtkonservative Kräfte. Wenn Sie einen Berggipfel besteigen wollen, dann haben Sie im Prinzip zwei Möglichkeiten: entweder Sie machen den Gipfel auf direktem Weg oder Sie nähern sich ihm entlang nicht ganz so steiler Pfade. Die mechanische Arbeit, die Sie gegen die Gravitationskraft verrichten müssen, ist indes für beide Möglichkeiten gleich groß. Dies liegt daran, dass die Gravitationskraft eine konservative Kraft ist. Berechnet man nämlich die Arbeit einer konservativen Kraft, dann findet man, dass sie unabhängig vom eingeschlagenen Weg ist. Nichtkonservative Kräfte haben wir auch schon kennengelernt: Reibungskräfte. Durch Reibung entsteht Wärme, die, wie wir noch sehen werden, auch eine Form der Energie ist. Allerdings kann sie nicht mehr in kinetische Energie eines Körpers umgewandelt werden. Wärme ist infolgedessen auch keine potentielle Energie.

Wir definieren

> **Mechanische Energie.** Unter mechanischer Energie W_{mec} eines Systems versteht man die Summe von kinetischer und potentieller Energie, also
>
> $$W_{\mathrm{mec}} = W_{\mathrm{kin}} + W_{\mathrm{pot}}. \tag{2.78}$$

Wir wollen zunächst annehmen, dass weder nichtkonservative noch äußere Kräfte am System Arbeit verrichten. Wir betrachten also ein isoliertes System. Eine Änderung der kinetischen Energie ΔW_{kin} etwa durch die Verrichtung einer mechanischen Arbeit W ist gemäß

$$\Delta W_{\mathrm{kin}} = -\Delta W_{\mathrm{pot}} \tag{2.79}$$

mit einer Änderung der potentiellen Energie des Systems verbunden. Anders formuliert:

$$W_{\mathrm{kin},2} - W_{\mathrm{kin},1} = -(W_{\mathrm{pot},2} - W_{\mathrm{pot},1}) \Leftrightarrow W_{\mathrm{kin},1} + W_{\mathrm{pot},1} = W_{\mathrm{kin},2} + W_{\mathrm{pot},2}. \tag{2.80}$$

Damit können wir sagen:

Prinzip von der Erhaltung der mechanischen Energie. In einem isolierten System, in dem ausschließlich konservative Kräfte Arbeit verrichten, ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie eine Konstante. Die mechanische Energie ändert sich nicht, d. h.

$$\Delta W_{\text{mec}} = \Delta W_{\text{kin}} + \Delta W_{\text{pot}} = 0. \tag{2.81}$$

Ein schönes Beispiel für die Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie und umgekehrt ist etwa gegeben durch die Pendelschwingung. Auch die Planetenbewegung lässt sich als Beispiel zitieren.

Wie ändert sich nun der Energieerhaltungssatz, wenn wir äußere Kräfte zulassen, die am System Arbeit verrichten können? Im vorigen Abschnitt haben wir schon gelernt, dass eine äußere Kraft an einem System die Arbeit W verrichtet und dabei die kinetische oder potentielle Energie des Systems verändert gemäß $W = \Delta W_{\text{kin}} > 0$ oder $W = \Delta W_{\text{pot}} > 0$. Wir lassen jetzt zu, dass unser System auch Energie an die Außenwelt verlieren kann, wobei also W_{kin} oder W_{pot} kleiner werden können, d. h. $W < 0$. Ist keine Reibung vorhanden, dann lautet der Energieerhaltungssatz

$$W = \Delta W_{\text{kin}} + \Delta W_{\text{pot}} = \Delta W_{\text{mec}}. \tag{2.82}$$

Lassen wir schließlich noch Reibungskräfte zu, dann müssen wir berücksichtigen, dass die aneinander reibenden Körper wärmer werden. Wir werden dies in der Wärmelehre noch genauer beschreiben. Da Wärme eine Form der Energie ist (thermische Energie W_{the}), müssen wir sie in den Energieerhaltungssatz mit aufnehmen, also

$$W = \Delta W_{\text{mec}} + \Delta W_{\text{the}}. \tag{2.83}$$

Eine endgültige Erweiterung erfährt der Energieerhaltungssatz, wenn man noch die Änderung interner anderer Formen der Energie zulässt. Bezeichnet man letztere mit ΔW_{int}, dann schreiben wir

$$W = \Delta W_{\text{mec}} + \Delta W_{\text{the}} + \Delta W_{\text{int}}. \tag{2.84}$$

Ein isoliertes System kann definitionsgemäß nicht mit seiner Außenwelt wechselwirken, also gibt es keinen Energietransfer, d. h. $W = 0$. Der Energieerhaltungssatz für ein isoliertes System lautet daher

$$\Delta W_{\text{mec}} + \Delta W_{\text{the}} + \Delta W_{\text{int}} = 0. \tag{2.85}$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, dass das Gesetz von der Erhaltung der Energie an Wichtigkeit nicht zu unterschätzen ist. Einem System kann Energie hinzugeführt werden, das System kann Energie abgeben, aber stets ist obige Bilanzgleichung, die die Erhaltung der Gesamtenergie beschreibt, erfüllt. Wir bemerken ferner, dass wir den Energieerhaltungssatz nicht aus physikalischen Prinzipien abgeleitet haben. Vielmehr beruht der Energieerhaltungssatz auf zahllosen Experimenten. Niemals wurde eine Ausnahme beobachtet.

2.5 Systeme von Massenpunkten

In diesem Abschnitt finden wir die Antwort auf die Frage, warum wir uns bisher auf Massenpunkte beschränkt haben. Dazu definieren wir:

Schwerpunkt, Massezentrum. Der Schwerpunkt eines Körpers oder eines Systems von Körpern bewegt sich so, als sei die gesamte Masse des Körpers in ihm vereint und als griffen alle äußeren Kräfte an ihm an.

So kompliziert die Bewegung eines starren Körpers auch aussehen mag, wir können sie zur Beschreibung auf einen Punkt, den Schwerpunkt, reduzieren. Die Berechnung des Schwerpunkts $\vec{r}_\mathrm{S}$ eines Systems von N Teilchen geschieht mittels

$$\vec{r}_\mathrm{S} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i, \tag{2.86}$$

wobei $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ die Gesamtmasse der N Körper bezeichne und $\vec{r}_i$ der Ortsvektor zum Massenpunkt i mit der Masse m_i sei. Nehmen wir nun obige Definition ernst, dann können wir das Zweite Newtonsche Gesetz für ein System von Massenpunkten wie folgt schreiben:

$$\vec{F}_\mathrm{ges} = M \, \vec{a}_\mathrm{S}. \tag{2.87}$$

Mathematisch gesehen, besitzt dieses Gesetz die gleiche Form wie das Gesetz für einen einzelnen Massenpunkt. Wir müssen jetzt allerdings beachten, dass $\vec{a}_\mathrm{S}$ die Beschleunigung des Schwerpunkts und M die Gesamtmasse des Systems ist. $\vec{F}_\mathrm{ges}$ ist nach wie vor die Resultierende der äußeren Kräfte. Nicht zur Beschleunigung tragen innere Kräfte zwischen Teilchen des Systems bei, da diese dem Dritten Newtonschen Gesetz gehorchen. Betrachten Sie als Beispiel den Stoß zweier Billard-Kugeln. Eine Kugel rolle, die andere ruhe. Nach dem Losrollen der einen Kugel wirken keine weiteren äußeren Kräfte auf das Zwei-Kugel-System. Die Kräfte beim Stoß sind innere Kräfte und tragen nichts zur Beschleunigung des Schwerpunkts bei. Dies bedeutet aber, dass sich der Schwerpunkt dieses Zwei-Körper-Problems geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Wir werden dies später ausnutzen, um Stoßereignisse zu beschreiben.

Wir definieren den

> **Impuls.** Der Impuls $\vec{p}$ eines Körpers der Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist gegeben durch
> $$\vec{p} = m \, \vec{v}. \tag{2.88}$$

Die Einheit des Impulses ist

$$[p] = \mathrm{kg} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{2.89}$$

Die Definition dieser Größe lässt wegen $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ eine Umformulierung des Zweiten Newtonschen Gesetzes zu, nämlich

$$\vec{F}_\mathrm{ges} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.90}$$

In Worten:

> Die zeitliche Änderungsrate des Impulses eines Teilchens ist gleich der Resultierenden aller auf das Teilchen einwirkenden äußeren Kräfte.

Für ein System von Teilchen lautet der Impuls

$$\vec{P} = M \, \vec{v}_\mathrm{S}, \tag{2.91}$$

worin nun $\vec{v}_\mathrm{S}$ die Geschwindigkeit des Schwerpunkts ist, also

> Der Impuls eines Systems von Teilchen ist gleich dem Produkt aus der Gesamtmasse M des Systems und der Geschwindigkeit $\vec{v}_\mathrm{S}$ des Schwerpunkts.

Somit können wir auch Newtons Zweites Gesetz für ein System von Teilchen aufschreiben zu

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.92}$$

Wir haben im letzten Abschnitt gelernt, dass in einem isolierten System (keine äußeren Kräfte) die mechanische Energie eine Konstante ist. Einen analogen Erhaltungssatz gibt es auch für den Impuls. In einem isolierten und abgeschlossenen (keine Teilchen gehen verloren oder treten hinzu) System ist der Gesamtimpuls $\vec{P}$ erhalten, d. h.

$$\vec{P} = \text{const.} \tag{2.93}$$

Dieses Gesetz können wir auch schreiben als

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2, \tag{2.94}$$

wobei $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$ die Gesamtimpulse zu zwei beliebigen Zeiten t_1 und t_2 sein mögen.

Als Beispiel zum Impulserhaltungssatz betrachten wir eine Kiste der Masse $m = 6\,\text{kg}$, die sich entlang der x-Achse mit einer Geschwindigkeit $v = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ reibungslos bewege. Plötzlich explodiere die Kiste, und ein Teil der Masse $m_1 = 2\,\text{kg}$ bewege sich mit $v_1 = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ entlang der positiven x-Achse. Welche Geschwindigkeit besitzt das zweite Teil mit Masse m_2? Zur Beantwortung der Frage stellen wir zunächst fest, dass das System der Kiste zwar abgeschlossen aber nicht isoliert ist, da äußere Kräfte in Form der Gravitations- und Normalkraft wirken. Letztere wirken allerdings entlang der y-Achse, so dass sie keine Veränderung des Impulses entlang der x-Achse bewirken. Während der Explosion wirken nur innere Kräfte der Kiste, die nach dem Zweiten Newtonschen Gesetz nichts zur Impulsänderung beitragen. Infolgedessen bleibt also der Gesamtimpuls der Kiste erhalten. Vor der Explosion gilt

$$\vec{P}_1 = m\,\vec{v}$$

und nach der Explosion

$$\vec{P}_2 = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2.$$

Wegen der Impulserhaltung können wir schreiben

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 \Leftrightarrow m\,\vec{v} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2.$$

Da sich die Bewegung nur entlang der x-Achse abspielt, also insbesondere eindimensional ist, können wir die Vektorschreibweise aufgeben und erhalten

$$m\,v = m_1\,v_1 + m_2\,v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{m\,v - m_1\,v_1}{m_2}.$$

Setzen wir alle Größen ein, dann erhalten wir

$$v_2 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Das zweite Teilstück der Kiste bewegt sich also mit $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ entlang der positiven x-Achse.

2.6 Stöße

Wir definieren zunächst den

> **Stoß.** Unter einem Stoß verstehen wir ein Ereignis, bei dem die kollidierenden Körper während eines Zeitintervalls Kräfte aufeinander ausüben.

Beachten Sie, dass in dieser Definition nicht zwingend ein Zusammenprall der Körper geschehen muss. Wir betrachten im Folgenden nur abgeschlossene und isolierte Systeme. Man spricht von einem elastischen Stoß, falls keine kinetische Energie verloren geht. Ist die kinetische Energie hingegen nicht erhalten, nennt man den Stoß inelastisch. Die meisten Stöße im Alltag sind inelastisch, da stets kinetische Energie in andere Formen der Energie (z. B. Schallenergie, Wärmeenergie) umgewandelt wird. Manche Stoßprozesse kann man als nahezu elastisch betrachten; denken Sie etwa an einen Flummi, der auf einen harten Boden trifft. Unabhängig von den Details des Stoßes und unabhängig vom Schicksal der kinetischen Energie kann der Gesamtimpuls des Systems nicht geändert werden. Der Grund hierfür ist, dass der Impuls nur durch das Einwirken äußerer Kräfte geändert werden kann. Beim Stoß selbst treten aber nur innere Kräfte auf. Wir halten fest:

> In einem abgeschlossenen, isolierten System ändern sich die Einzelimpulse stoßender Teilchen derart, dass der Gesamtimpuls eine Erhaltungsgröße ist. Diese Aussage gilt für elastische wie inelastische Stöße.

Als ein erstes Beispiel betrachten wir den vollkommen inelastischen Stoß in einer Dimension. Nach dem Stoß kleben die Stoßpartner zusammen. Wir nehmen außerdem an, dass das Teilchen mit Masse m_2 vor dem Stoß ruhe ($v_{2,\text{vor}} = 0$). In gewisser Weise ist dieses Teilchen das Ziel, während das andere die Aufgabe des Projektils übernimmt. Der Impulssatz lautet dann:

$$m_1\, v_{1,\text{vor}} = (m_1 + m_2)\, V, \tag{2.95}$$

wobei V die gemeinsame Geschwindigkeit der zusammenklebenden Teilchen bedeutet. Die letzte Gleichung benötigt man für das sogenannte Ballistische Pendel, das früher benutzt wurde, um die Geschwindigkeiten von Gewehrkugeln zu messen. Eine mögliche Ausführung zeigt Abbildung 2.7. Ein großer Block aus Holz der Masse M wird als Pendel aufgehängt. Ein Projektil der Masse m und der Geschwindigkeit v treffe auf den anfangs ruhenden Holzblock, der nach dem Stoß ausgelenkt wird. Die Auslenkung des Holzblocks mit der steckenden Kugel misst man über die Höhe h. Zunächst ist klar, dass wir zur Ermittlung der Projektilgeschwindigkeit nicht den Erhaltungssatz mechanischer Energie verwenden können, da sicherlich Teile der kinetischen Energie der Kugel aufgebraucht werden, um das Holz zu zerbrechen oder einfach als Wärme abgeführt zu werden. Sobald die Kugel aber steckt, können wir den Erhaltungssatz der mechanischen Energie anwenden, um die Höhe des Ausschlags zu berechnen. Wir setzen also zuerst den Impulserhaltungssatz an, um die Geschwindigkeit V des Systems Holzblock-Kugel direkt nach dem Auftreffen der Kugel zu berechnen. Dies können wir mit der Formel für den eindimensionalen, komplett inelastischen Stoß bewerkstelligen, also

$$V = \frac{m}{m+M}\, v.$$

Die kinetische Energie des Holzblock-Kugel-Systems ist im untersten Punkt der Schwingung

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,(m+M)\,V^2$$

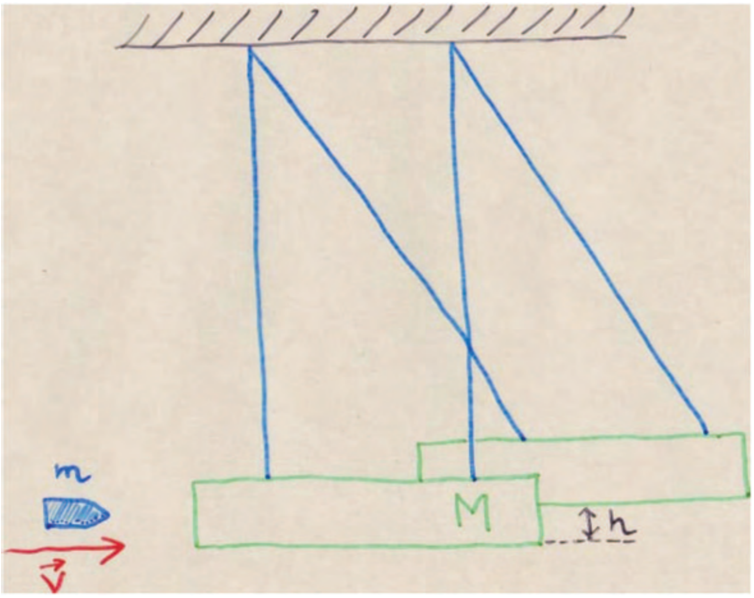

Abbildung 2.7: Ballistisches Pendel. Ein Projektil wird auf einen Holzklotz geschossen. Aus der Auslenkung kann man die Geschwindigkeit des Projektils ermitteln.

und wandelt sich gemäß dem Erhaltungssatz mechanischer Energie in Lage-Energie um:

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{pot}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,(m+M)\,V^2 = (m+M)\,g\,h.$$

Wir haben das Nullniveau dabei in den untersten Punkt der Pendelschwingung gelegt. Damit erhalten wir für V:

$$V = \sqrt{2\,g\,h}$$

und also für das gesuchte v:

$$v = \frac{m+M}{m}\,\sqrt{2\,g\,h}.$$

In einem konkreten Experiment hat man $M = 5{,}4\,\text{kg}$, $m = 9{,}5\,\text{g}$ und $h = 6{,}3\,\text{cm}$. Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} v &= \frac{9{,}5\,\text{g} + 5{,}4\,\text{kg}}{9{,}5\,\text{g}}\,\sqrt{2 \times 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 6{,}3\,\text{cm}} \\ &= \frac{9{,}5 \times 10^{-3}\,\text{kg} + 5{,}4\,\text{kg}}{9{,}5 \times 10^{-3}\,\text{kg}}\,\sqrt{2 \times 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 6{,}3 \times 10^{-2}\,\text{m}} \\ &\approx 633\,\frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Zum Schluss des Abschnitts über Stöße behandeln wir den elastischen Stoß in einer Dimension; die kinetische Energie vor und nach dem Stoß soll also erhalten bleiben. Infolgedessen können wir zwei Erhaltungssätze aufschreiben, nämlich den Impulserhaltungssatz

$$m_1\,v_{1,\text{vor}} + m_2\,v_{2,\text{vor}} = m_1\,v_{1,\text{nach}} + m_2\,v_{2,\text{nach}}$$

und den Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}\,m_1\,v_{1,vor}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_{2,vor}^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,v_{1,nach}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_{2,nach}^2.$$

Typischerweise möchte man die Geschwindigkeiten $v_{1,nach}$ und $v_{2,nach}$ nach dem Stoß wissen, so dass obige Gleichung nach diesen Größen aufgelöst werden muss. Dazu machen wir aus dem Impulserhaltungssatz

$$m_1\left(v_{1,\mathrm{vor}}-v_{1,\mathrm{nach}}\right)=-m_2\left(v_{2,\mathrm{vor}}-v_{2,\mathrm{nach}}\right)$$

und aus dem Energieerhaltungssatz

$$m_1\left(v_{1,\mathrm{vor}}-v_{1,\mathrm{nach}}\right)\left(v_{1,\mathrm{vor}}+v_{1,\mathrm{nach}}\right)=-m_2\left(v_{2,\mathrm{vor}}-v_{2,\mathrm{nach}}\right)\left(v_{2,\mathrm{vor}}+v_{2,\mathrm{nach}}\right).$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
v_{1,\mathrm{nach}} &= \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,v_{1,\mathrm{vor}}+\frac{2\,m_2}{m_1+m_2}\,v_{2,\mathrm{vor}}\\
v_{2,\mathrm{nach}} &= \frac{2\,m_1}{m_1+m_2}\,v_{1,\mathrm{vor}}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\,v_{2,\mathrm{vor}}
\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen wird es eine Übungsaufgabe geben.

2.7 Rotation

Bislang haben wir der Bewegung entlang einer geraden Linie besonders viel Aufmerksamkeit geschenkt. In diesem Abschnitt wenden wir das Augenmerk auf Drehbewegungen, wie sie etwa von Rädern, Planeten oder Eiskunstläuferinnen vollführt werden. Zunächst betrachten wir die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse. Unter einem starren Körper verstehen wir einen Körper, dessen Bestandteile fest zusammenhalten und der bei der Rotation seine Form beibehält. Eine feste Drehachse möge sich nicht bewegen. Also werden wir nicht die Drehbewegung etwa der Sonne beschreiben, die als Gaskugel bei ihrer Rotation ganz und gar nicht ihre Form beibehält; wir werden zunächst auch nicht die Bewegung etwa einer Bowling-Kugel beschreiben, da ihre Drehachse eine Translation vollführt.

Betrachten wir einen beliebigen starren Körper, der um eine Achse durch den Körper eine Drehbewegung ausführe (nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Drehachse mit der z-Achse eines Rechtssystems zusammenfalle, siehe zur Illustration auch Abbildung 2.8). Jeder Punkt des starren Körpers beschreibt bei der Rotation einen Kreis (parallel zur xy-Ebene), der seinen Mittelpunkt auf der festen Drehachse besitzt. Weiter überschreitet jeder Punkt im gleichen Zeitintervall den gleichen Winkel. Denken Sie sich eine Referenzachse senkrecht zur Drehachse befestigt. Die Referenzachse überstreiche einen Winkel φ, den wir z. B. relativ zur positiven x-Achse messen können. Ein Teilchen, das auf der Referenzachse sitze und den Abstand r von der Drehachse besitze, bewegt sich dabei auf einem Bogen der Länge

$$s=r\,\varphi. \tag{2.96}$$

Beachten Sie, dass der Winkel φ im Bogenmaß angegeben ist. Bei der Translation entlang einer geraden Linie reicht es aus, das Weg-Zeit-Gesetz $x(t)$ zur Beschreibung der Bewegung zu kennen. Analog benötigen wir bei der Rotation um eine feste Achse die Information $\varphi(t)$.

Als Winkelverschiebung definieren wir

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1 \tag{2.97}$$

und legen definitionsgemäß fest

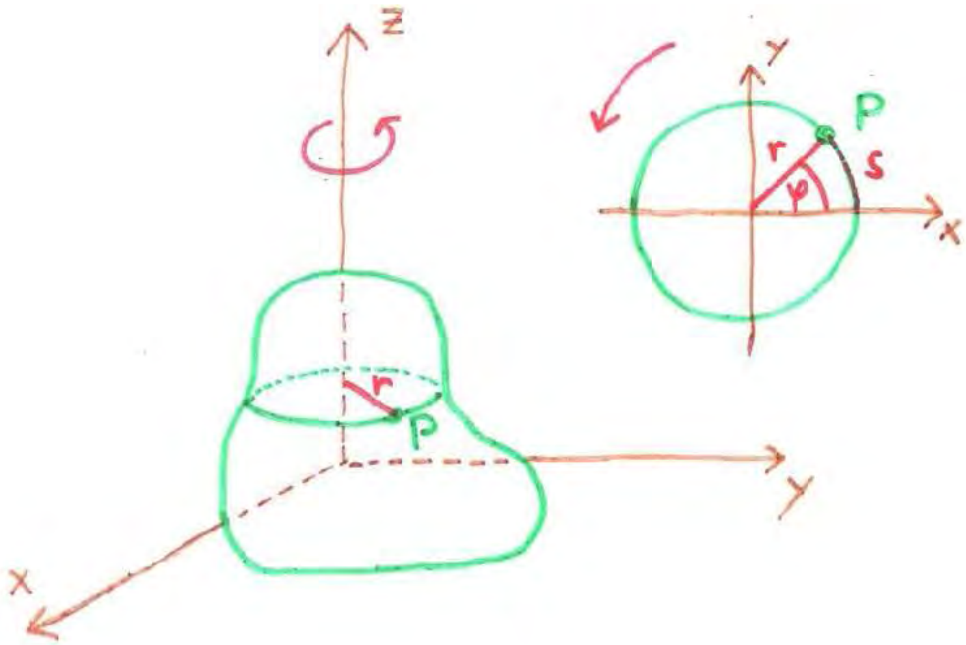

Abbildung 2.8: Rotation eines starren Körpers um die z-Achse.

Eine Winkelbewegung gegen den Uhrzeigersinn ergibt eine positive Winkelverschiebung; eine Winkelbewegung mit dem Uhrzeigersinn führt zu einer negativen Winkelverschiebung.

Analog zur Translationsbewegung definieren wir die

Mittlere Winkelgeschwindigkeit.

$$\langle\omega\rangle = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{2.98}$$

Die momentane Winkelgeschwindigkeit lautet dann

Momentane Winkelgeschwindigkeit.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{2.99}$$

Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist

$$[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{2.100}$$

Beachten Sie, dass das Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit wie das Vorzeichen der Winkelverschiebung vom Drehsinn der Rotation abhängt. Wir definieren weiter:

Mittlere Winkelbeschleunigung.

$$\langle\alpha\rangle = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{2.101}$$

Momentane Winkelbeschleunigung.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \tag{2.102}$$

Die Einheit der Winkelbeschleunigung lautet:

$$[\alpha] = \frac{1}{\mathrm{s}^2}. \tag{2.103}$$

Alle Gleichungen gelten nicht nur für den starren Körper als Ganzes sondern für jedes einzelne Teilchen des Körpers.

Bei den Translationen hatten wir gesehen, dass Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung Vektoren sind. Können wir etwa der Winkelgeschwindigkeit Vektorcharakter zuschreiben? Ja, aber mit Vorsicht. Denken Sie an eine Schallplatte, die sich im Uhrzeigersinn dreht. Um der Winkelgeschwindigkeit eine Richtung zuzuweisen, verwenden wir eine Rechte-Hand-Regel: wir krümmen die Finger der rechten Hand in Richtung der Drehbewegung, dann zeigt der Daumen derselben Hand in die Richtung der Winkelgeschwindigkeit. Dieser Konvention genügt auch die Winkelbeschleunigung. Jetzt zur Vorsicht: die Winkelverschiebung indes kann nicht als Vektor aufgefasst werden (es sei denn, die Verschiebungen sind infinitesimal klein). Eine Eigenschaft von Vektoren ist nämlich, dass die Addition unabhängig von der Reihenfolge ist. Dass diese Regel bei der Winkelverschiebung verletzt ist, sehen Sie einfach an einem Experiment, das Sie selbst jederzeit durchführen können. Nehmen Sie etwa ein Buch und drehen Sie es nacheinander um zwei unterschiedliche Achsen. Wiederholen Sie das Experiment nun mit umgekehrter Reihenfolge der Drehbewegungen. Sie sehen, dass das Endergebnis unterschiedlich ist.

Wir werden nun Größen der Translation und Rotation miteinander in Verbindung bringen. Die translatorische Verschiebung s ist mit der Winkelverschiebung φ über Gleichung 2.96 verknüpft. Beachten Sie, dass φ hier im Bogenmaß anzugeben ist. Damit können wir für die Geschwindigkeit v schreiben

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\,\omega. \tag{2.104}$$

Die Geschwindigkeit v nennt man auch die Bahngeschwindigkeit, und wir sehen, dass mit wachsendem Radius die Bahngeschwindigkeit zunimmt. Die Winkelgeschwindigkeit ist ja für alle Teilchen des starren Körpers dieselbe. Wir erinnern uns außerdem, dass die Bahngeschwindigkeit tangential zur Kreisbahn des betrachteten Teilchens gerichtet ist. Wir können die Periodendauer T für eine Umdrehung jetzt auch mit der Winkelgeschwindigkeit formulieren:

$$T = \frac{2\,\pi\,r}{v} = \frac{2\,\pi}{\omega}. \tag{2.105}$$

Die Gleichung für die Beschleunigung, nämlich $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, gibt uns lediglich die Änderung des Betrags der Bahngeschwindigkeit an. Daher finden wir

$$a_{\mathrm{t}} = r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\,\alpha, \tag{2.106}$$

worin a_{t} die Tangentialkomponente der Beschleunigung darstellt. Die radiale Beschleunigung hatten wir bereits für die gleichförmige Kreisbewegung kennengelernt. Wir notieren sie hier noch einmal, und geben ihr die Bezeichnung a_{r}:

$$a_{\mathrm{r}} = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2. \tag{2.107}$$

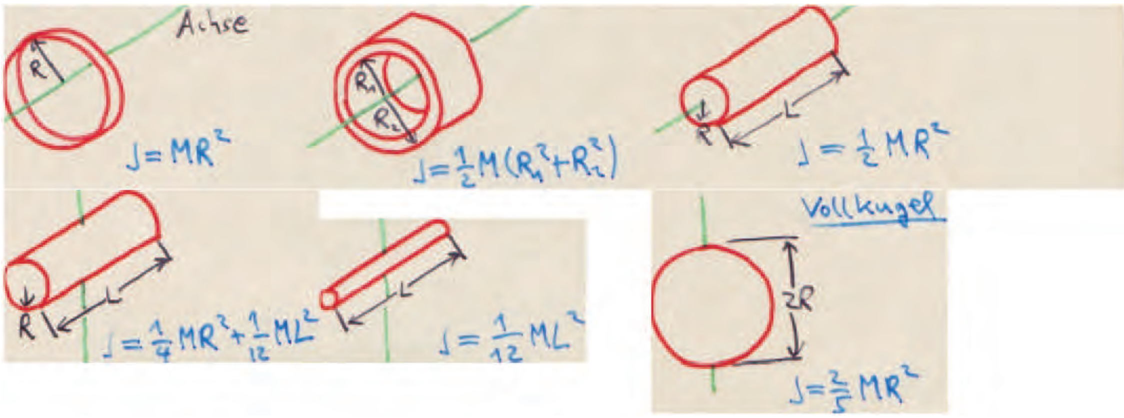

Abbildung 2.9: Trägheitsmomente ausgewählter Körper.

Wie können wir die kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers ermitteln? Ein Weg zur Beantwortung dieser Frage ist die Addition der kinetischen Energien aller im starren Körper vorhandenen Teilchen, also

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{rot}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \cdots \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Um obige Gleichung ein wenig zu vereinfachen, verwenden wir, dass $v_i = r_i\,\omega$, dann erhalten wir

$$W_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} J\,\omega^2, \tag{2.109}$$

worin wir die Abkürzung

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \tag{2.110}$$

verwendet haben. Man nennt J das Trägheitsmoment des starren Körpers. Damit besitzt die Rotationsenergie W_{rot} eine analoge Form wie die translatorische kinetische Energie eines Massenpunktes, nämlich $W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\, m\, v^2$. Analoge Größen sind also J, m und ω, v. Wir halten fest, dass bei der Rotationsbewegung die Trägheit nicht nur von der Gesamtmasse des Körpers abhängt, sondern auch von der räumlichen Verteilung dieser Masse. Denken Sie etwa an einen langen, schweren Metallstab. Drehen Sie ihn einmal um seine Längsachse (das wird Ihnen eher leicht fallen) und dann um eine Achse senkrecht zur Längsachse (das ist erheblich schwieriger). In Abbildung 2.9 sind die Trägheitsmomente einiger ausgewählter Körper angegeben.

Wir kümmern uns nun um den Begriff des Drehmoments. Haben Sie sich schon einmal überlegt, warum Türgriffe immer möglichst weit von der Drehachse der Tür entfernt sind? Wenn Sie eine schwere Tür öffnen möchten, dann müssen Sie eine Kraft ausüben. Das ist aber nicht alles, denn Ihr Erfolg, die Tür zu öffnen, hängt auch davon ab, wo Sie die Kraft relativ zur Drehachse wirken lassen. Ihre Erfahrung sagt ihnen, dass Sie zur Öffnung der Tür möglichst weit weg von der Drehachse eine Kraft möglichst senkrecht zur Türebene ausüben müssen. Stellen Sie sich den Querschnitt eines starren Körpers vor, der senkrecht zur Drehachse verlaufe. Im Querschnitt durchstoße die Drehachse den Körper im Punkt O. In einem Punkt P mit Ortsvektor $\vec{r}$ relativ zu

O am Rande des Körpers greife eine Kraft $\vec{F}$ an, so dass zwischen $\vec{F}$ und $\vec{r}$ der Winkel α liege. Wie so häufig, zerlegen wir den Vektor der Kraft in zwei Komponenten. Die Komponente senkrecht zum Ortsvektor (also tangential an den Körper) nennen wir F_t; die Komponente parallel zum Ortsvektor nennen wir F_r (Radialkomponente). Die Radialkomponente bewirkt keine Rotation des Körpers; die Tangentialkomponente hingegen vermag den Körper zu drehen. Wir fassen zusammen, dass die Fähigkeit einer Kraft, einen Körper in Drehbewegung zu versetzen, nicht nur von der Größe ihrer Tangentialkomponente abhängt, sondern auch von der Entfernung des Angriffpunktes von der Drehachse. Diesen Eigenschaften trägt das Drehmoment M Rechnung, das wir zunächst als einen Skalar definieren.

Drehmoment.

$$M = F\,r\,\sin\alpha. \tag{2.111}$$

Die Einheit des Drehmoments ist

$$[M] = \mathrm{N\,m} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}. \tag{2.112}$$

Beachten Sie, dass das Drehmoment dieselbe SI-Einheit wie die Energie besitzt. Da Drehmoment und Energie offensichtlich zwei unterschiedliche Größen sind, gibt man das Drehmoment nicht etwa in Joule an. Man kann obige Definition auch umschreiben zu

$$M = F_\mathrm{t}\,r \tag{2.113}$$

$$M = F\,r_\perp, \tag{2.114}$$

worin F_t die oben definierte Tangentialkomponente der Kraft ist und $r_\perp$ diejenige Komponente des Ortsvektors beschreibt, die senkrecht auf der wirkenden Kraft steht. Man nennt $r_\perp$ auch den Hebelarm.

Jetzt sind wir in der Lage, das Zweite Newtonsche Gesetz für die Drehbewegung zu formulieren. Wir erinnern uns kurz, dass sich die translatorische Beschleunigung des Schwerpunktes berechnen lässt, wenn wir nur die Gesamtmasse des Körpers und die Resultierende aller äußeren Kräfte kennen. Auf ähnliche Weise werden wir nun Drehmoment, Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung miteinander verknüpfen. Dazu betrachten wir ein einzelnes Teilchen, das durch einen Stab (mit vernachlässigbarer Masse) mit dem Drehzentrum verbunden ist. Wir haben oben gesehen, dass ein Drehmoment eine Drehbewegung, also eine Winkelbeschleunigung, erzeugen kann. Wenn wir eine Kraft auf obiges Teilchen ausüben, dann kann nur die Tangentialkomponente dieser Kraft das Teilchen beschleunigen. Wenn m die Masse des Teilchens ist, dann können wir schreiben

$$F_\mathrm{t} = m\,a_\mathrm{t}.$$

Das zugehörige Drehmoment lautet

$$M = F_\mathrm{t}\,r = m\,a_\mathrm{t}\,r.$$

Wegen $a_\mathrm{t} = \alpha\,r$ können wir schreiben

$$M = m\,\alpha\,r^2 = m\,r^2\,\alpha = J\,\alpha,$$

wobei wir mit $J = m\,r^2$ das Trägheitsmoments des Teilchens um die Drehachse bezeichnen. Damit lautet das Zweite Newtonsche Gesetz für die Drehbewegung

$$M_\mathrm{ges} = J\,\alpha. \tag{2.115}$$

Dabei gibt M_{ges} das gesamte Drehmoment auf den Körper an. Wir werden im nächsten Abschnitt dieses Gesetz allgemeiner formulieren.

Zum Schluss dieses Abschnitts besprechen wir noch den Zusammenhang zwischen mechanischer Arbeit und Rotationsenergie. Aus den vorigen Abschnitten wissen Sie noch, dass an einem Körper verrichtete Arbeit W die kinetische Energie dieses Körpers verändern kann gemäß $W = \Delta W_{\mathrm{kin}}$. Ganz analog kann man formulieren

$$W = \Delta W_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\, J\, \omega_2^2 - \frac{1}{2}\, J\, \omega_1^2. \tag{2.116}$$

Hierin sind ω_1 und ω_2 die Winkelgeschwindigkeiten vor und nach der Verrichtung mechanischer Arbeit. Wir können auch einen Zusammenhang zwischen mechanischer Arbeit und Drehmoment finden, denn wir haben

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F\, \mathrm{d}s$$

als allgemeine Definition der mechanischen Arbeit. Nun ist aber wegen $s = r\,\varphi$ auch $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$ und somit

$$\begin{aligned} W &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{\mathrm{t}}\, r\, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\, \mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Beachten Sie, dass nur die Tangentialkomponente der Kraft Arbeit verrichtet. Ist das Drehmoment sogar eine Konstante, dann können wir für die mechanische Arbeit schreiben

$$W = M\,(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{2.118}$$

Die Leistung P ergibt sich wegen $\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\varphi$ zu

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M\,\omega. \tag{2.119}$$

2.8 Drehmoment und Drehimpuls

Wir betrachten zum Einstieg in diesen Abschnitt die Rollbewegung ohne Schlupf. Darunter versteht man in der Physik das reine Rollen eines Körpers, d. h. die Rollbewegung findet ohne Gleiten statt. Denken Sie etwa an die Räder eines fahrenden Fahrrads. Wenn Sie geradeaus radeln, dann bewegt sich das Zentrum eines Rades entlang einer Linie; der Reifen hingegen vollführt eine erheblich kompliziertere Bewegung. Wir werden sehen, dass die Rollbewegung sich als eine Kombination aus Translation und Rotation beschreiben lässt. Der Schwerpunkt eines rollenden Rades bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{S}}$. Der Kontaktpunkt P zwischen Reifen und Straße bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit, d. h. die gefahrene Strecke s des Schwerpunkts findet man als Bogen auf dem Rad wieder:

$$s = R\,\varphi, \tag{2.120}$$

wobei R der Radius des Rades und φ die beim Rollen entstandene Winkelverschiebung ist. Nun ist aber wegen

$$v_{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

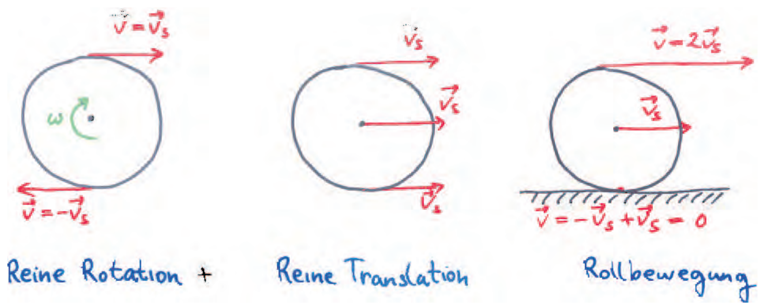

Abbildung 2.10: Rollbewegung eines Rades als Kombination aus reiner Rotation und Translation.

und

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

auch

$$v_\mathrm{S} = R\,\omega. \tag{2.121}$$

In Abb. 2.10 sehen Sie, dass man die Rollbewegung zusammensetzen kann aus einer reinen Rotation des Körpers um eine Achse durch den Schwerpunkt und aus der Tanslation des Schwerpunkts. Beachten Sie, dass bei dieser Kombination der Bewegungen der Punkt P momentan in Ruhe ist; ein Punkt oben auf dem Rad bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = 2\,\vec{v}_\mathrm{S}$ um die momentane Drehachse durch P.

Diese Aufteilung der Rollbewegung in eine Translation des Schwerpunkts und eine Rotation des starren Körpers um eine Achse durch den Schwerpunkt schlägt sich auch bei der Berechnung der kinetischen Energie nieder:

$$W_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}\,M\,v_\mathrm{S}^2 + \frac{1}{2}\,J_\mathrm{S}\,\omega^2. \tag{2.122}$$

Das Trägheitsmoment J_S wird bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt berechnet. Wir halten also fest:

> Ein rollender starrer Körper besitzt zwei Formen kinetischer Energie: eine Rotationsenergie aufgrund seiner Drehung um seinen Schwerpunkt und eine translatorische kinetische Energie aufgrund der Translation seines Schwerpunkts.

Als Beispiel behandeln wir die Rollbewegung eines Rohrs und eines Vollzylinders auf einer schiefen Ebene. Beide Körper lassen wir gleichzeitig aus der Höhe h hinunter rollen. Sie erinnern sich, dass der Vollzylinder das Rennen gewinnt. Warum ist dies so? Zur Beantwortung der Frage schreiben wir den Energieerhaltungssatz auf (Nullniveau am tiefen Ende der schiefen Ebene):

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_\mathrm{S}^2 + \frac{1}{2}\,J_\mathrm{S}\,\omega^2.$$

Da die Rollbewegung beider Körper ohne Schlupf stattfindet, gilt $v_\mathrm{S} = \omega\,R$, wobei R der gleiche Radius beider Körper ist. Dann erhalten wir

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_\mathrm{S}^2 + \frac{1}{2}\,J_\mathrm{S}\,\frac{v_\mathrm{S}^2}{R^2}$$

und damit für v_S

$$v_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,h}{m + \frac{J_\mathrm{S}}{R^2}}}.$$

Nun wissen wir, dass

$$\begin{aligned} J_\mathrm{Rohr} &= m\,R^2, \\ J_\mathrm{Zylinder} &= \frac{1}{2}\,m\,R^2. \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Endgeschwindigkeiten vergleichen, also

$$\begin{aligned} v_\mathrm{Rohr} &= \sqrt{g\,h}, \\ v_\mathrm{Zylinder} &= \sqrt{\frac{4}{3}\,g\,h}. \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass der Vollzylinder mit größerer Geschwindigkeit als erster unten ankommt. Erinnern Sie sich, dass ein Körper, der ohne Rotation die schiefe Ebene hinunter gleitet, die Geschwindigkeit $v_\mathrm{S} = \sqrt{2\,g\,h}$ besitzt.

Als ein weiteres Beispiel berechnen wir die kinetische Energie einer zylindrischen Scheibe der Masse $M = 1{,}4\,\mathrm{kg}$ und des Radius $R = 8{,}5\,\mathrm{cm}$, die auf einem horizontalen Tisch mit der Geschwindigkeit $15\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ rolle. Es gelten die Formeln

$$W_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}\,M\,v_\mathrm{S}^2 + \frac{1}{2}\,J_\mathrm{S}\,\omega^2$$

und

$$v_\mathrm{S} = \omega\,R$$

und

$$J_\mathrm{S} = \frac{1}{2}\,M\,R^2.$$

Damit haben wir

$$W_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}\,M\,v_\mathrm{S}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\,M\,R^2\,\frac{v_\mathrm{S}^2}{R^2} = \frac{3}{4}\,M\,v_\mathrm{S}^2.$$

Einsetzen und Beachtung der Einheiten liefert:

$$W_\mathrm{kin} = \frac{3}{4} \times 1{,}4\,\mathrm{kg} \times 15 \times 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}024\,\mathrm{J}.$$

Zum Abschluss der Diskussion der Rollbewegung behandeln wir ein Beispiel, in dem alles enthalten ist: die Rollbewegung eines starren Körpers unter Berücksichtigung der Reibung. Sie können alle benötigten Größen der Abb. 2.11 entnehmen. Wir fragen nach der Beschleunigung des Schwerpunkts des starren Körpers entlang der schiefen Ebene. Die x-Achse orientieren wir gemäß der Abbildung. Das Zweite Newtonsche Gesetz besagt:

$$M\,a_{\mathrm{S},x} = F_{\mathrm{ges},x},$$

d. h. die x-Komponente der Beschleunigung $a_{\mathrm{S},x}$ wird durch die Resultierende aller äußeren Kräfte entlang der x-Achse bewirkt. In die negative x-Richtung wirkt die Hangabtriebskraft

$$F_\mathrm{H} = -m\,g\,\sin\varphi,$$

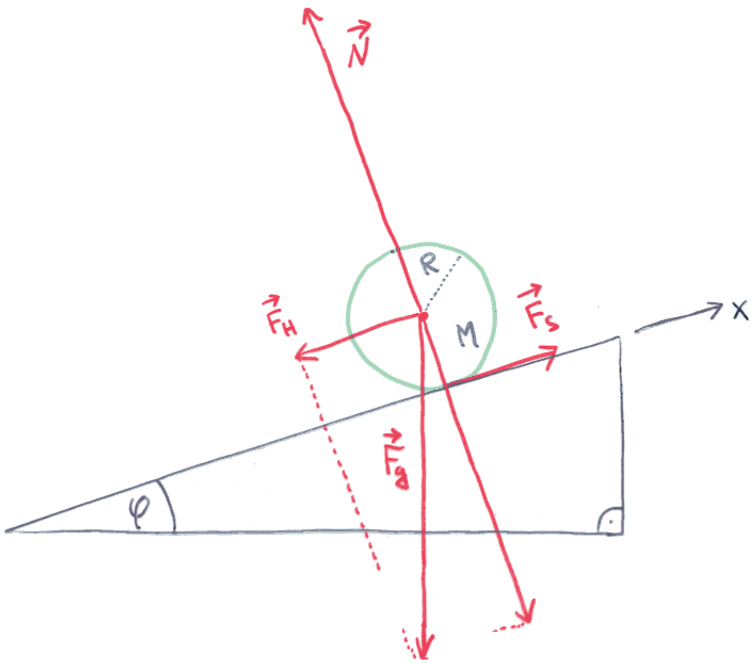

Abbildung 2.11: Rollbewegung eines starren Körpers unter Berücksichtigung der Reibungskraft.

worin φ der Neigungswinkel der schiefen Ebene ist. Entlang der positiven x-Achse wirkt die Haftreibungskraft F_h, die den rollenden Körper am Gleiten hindert. Damit können wir schreiben

$$M\, a_{\mathrm{S},x} = F_\mathrm{h} - m\, g\, \sin\varphi.$$

In der letzten Formel taucht neben der gesuchten Beschleunigung als weitere Unbekannte die Haftreibungskraft F_h auf, die wir im Folgenden eliminieren. Dazu beschreiben wir die Drehbewegung des Körpers und erinnern uns an das Drehmoment M:

$$M = F_\mathrm{h}\, R = J_\mathrm{S}\, \alpha.$$

Die Haftreibungskraft greift senkrecht am Hebelarm mit Länge R an und bewirkt ein Drehmoment M, das den starren Körper mit Trägheitsmoment J_S bezüglich einer Achse durch seinen Schwerpunkt in eine Drehbewegung mit Winkelbeschleunigung α versetzt. Das Drehmoment ist positiv, da die Drehung gegen den Uhrzeigersinn vollführt wird. Beachten Sie, dass die Hangabtriebskraft am Schwerpunkt selbst angreift und damit kein Drehmoment um eine Achse durch den Schwerpunkt bewirkt. Für die translatorische Beschleunigung des Schwerpunkts gilt nun

$$a_{\mathrm{S},x} = -R\, \alpha$$

(Minuszeichen beachten) und somit

$$F_\mathrm{h}\, R = -J_\mathrm{S}\, \frac{a_{\mathrm{S},x}}{R} \Leftrightarrow F_\mathrm{h} = -J_\mathrm{S}\, \frac{a_{\mathrm{S},x}}{R^2}.$$

Letztere Beziehung für die Reibungskraft setzen wir in das Zweite Newtonsche Gesetz ein und erhalten

$$M\, a_{\mathrm{S},x} = -J_\mathrm{S}\, \frac{a_{\mathrm{S},x}}{R^2} - M\, g\, \sin\varphi \Leftrightarrow a_{\mathrm{S},x} = -\frac{g\, \sin\varphi}{1 + \frac{J_\mathrm{S}}{M\, R^2}}.$$

Der Jojo kann mit dieser Formel für $\varphi = 90°$ ebenfalls berechnet werden.

Wir definieren nun das Drehmoment ganz allgemein für ein Teilchen, das sich relativ zu einem festen Punkt bewege (keine feste Achse vorausgesetzt):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{2.123}$$

Die Richtung des Drehmoments erhalten Sie wieder mit der Rechten-Hand-Regel (Ortsvektor $\vec{r}$ in Richtung der Kraft $\vec{F}$ klappen und Finger der rechten Hand in diese Richtung krümmen - der Daumen zeigt dann automatisch in die Richtung von $\vec{M}$). Das Drehmoment ist also als ein Vektorprodukt definiert, dessen Betrag Sie über

$$|\vec{M}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\,\sin\varphi \tag{2.124}$$

berechnen können. Hierin ist φ der von $\vec{r}$ und $\vec{F}$ eingeschlossene Winkel.

Bei der Translation haben wir den Impuls $\vec{p}$ definiert. Das Analogon bei der Rotation ist der Drehimpuls $\vec{l}$. Wir definieren den Drehimpuls eines Teilchens bezüglich eines Koordinatenursprungs zu

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{2.125}$$

worin $\vec{r}$ der Ortsvektor des Teilchens bezüglich des gewählten Ursprungs ist. Die Einheit des Drehimpulses lautet

$$[l] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}. \tag{2.126}$$

Die Richtung von $\vec{l}$ findet man wieder mit der Rechten-Hand-Regel (s. o.). Da auch $\vec{l}$ als Vektorprodukt definiert ist, lautet sein Betrag

$$|\vec{l}| = |\vec{r}|\,|\vec{p}|\,\sin\varphi, \tag{2.127}$$

worin φ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{p}$ ist.

Jetzt haben wir alle nötigen Größen der Drehbewegung definiert, um das Zweite Newtonsche Gesetz für die Rotation zu formulieren. Es lautet:

$$\vec{M}_{\mathrm{ges}} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}, \tag{2.128}$$

d. h. die Resultierende aller äußeren Drehmomente, die auf ein Teilchen wirken, ist gleich der zeitlichen Änderungsrate des Drehimpulses des Teilchens. Beachten Sie die Ähnlichkeit zum Zweiten Newtonschen Gesetz für die Translation: $\vec{F}_{\mathrm{ges}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$.
Betrachtet man ein System von Teilchen, dann führt man den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ analog zum Gesamtimpuls $\vec{P}$ ein über

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i. \tag{2.129}$$

Damit lautet das Zweite Newtonsche Gesetz für die Drehbewegung eines Systems von Teilchen

$$\vec{M}_{\mathrm{ges}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.130}$$

Wir fragen nach dem Drehimpuls eines starren Körpers, der um eine feste Achse rotiere. Wir legen ohne Beschränkung der Allgemeinheit diese feste Achse als z-Achse fest. Gefragt ist also nach dem Drehimpuls eines Körpers, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiere. Zur Berechnung greifen wir ein beliebiges Massenelement der Masse m_i aus dem starren Körper heraus und berechnen seinen Drehimpuls um die z-Achse. Der Ortsvektor zu diesem Teilchen sei $\vec{r}_i$, der mit der z-Achse den Winkel φ_i einschließe. Das Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius $r_{\perp i}$ senkrecht zur z-Achse. Bezüglich des Koordinatenursprungs besitzt das Teilchen den Drehimpuls

$$l_i = r_i\, p_i.$$

Beachten Sie dabei, dass $\vec{r}_i$ und $\vec{p}_i$ einen Winkel von 90° miteinander einschließen. Die z-Komponente von $\vec{l}_i$ lautet

$$l_{iz} = l_i\, \sin\varphi_i,$$

und es gilt weiter

$$r_{\perp i} = r_i\, \sin\varphi_i,$$

so dass wir schreiben können

$$l_{iz} = r_i\, p_i\, \sin\varphi_i = r_{\perp i} p_i = r_{\perp i}\, m_i\, v_i.$$

Damit gilt für die z-Komponente des gesamten Drehimpulses

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} l_{iz} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i\, r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \omega\, r_{\perp i}^2 = J\, \omega.$$

In der letzten Formel haben wir v_i ersetzt durch $v_i = \omega\, r_{\perp i}$ und die bekannte Abkürzung $J = \sum_i m_i\, r_{\perp i}^2$ für das Trägheitsmoment verwendet. Wir erhalten also den Drehimpuls um die Drehachse zu

$$L = J\, \omega. \tag{2.131}$$

Beachten Sie, dass wir den Index z nicht länger notiert haben. Sie müssen allerdings darauf achten, dass diese Formel den Drehimpuls um die Drehachse angibt. Ebenso ist das Trägheitsmoment um diese Achse zu berechnen.

Wir formulieren nun den

> **Drehimpulserhaltungssatz.** Ist die Resultierende der äußeren Drehmomente auf ein System Null, dann bleibt der Drehimpuls $\vec{L}$ des Systems konstant, d. h.
>
> $$\vec{L} = \text{const} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2. \tag{2.132}$$

Kennen wir also den Drehimpuls $\vec{L}_1$ zu einer Zeit t_1, dann kennen wir wir ihn für jede beliebige andere Zeit t_2. Als ein erstes Beispiel behandeln wir den rotierenden Freiwilligen, der auf einem Drehschemel am Ende seiner gestreckten Arme jeweils ein Gewicht hält. Sie erinnern sich, dass, einmal in Drehung versetzt, die Winkelgeschwindigkeit anstieg, sobald der Freiwillige die Gewichtstücke zu seiner Körpermitte gezogen hatte. Dies können wir mit dem Drehimpulserhaltungssatz verstehen. Dazu bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Freiwilligen mit ausgestreckten Armen als J_1 und seine Winkelgeschwindigkeit mit ω_1. Die entsprechenden Größen für eingezogene Arme seien J_2 und ω_2. Dann gilt

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow J_1\, \omega_1 = J_2\, \omega_2 \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\, \omega_1.$$

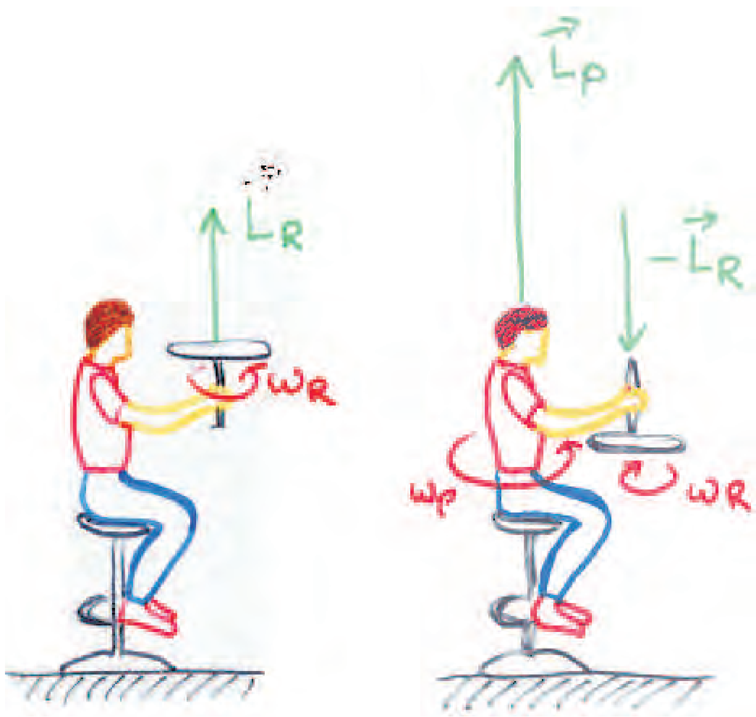

Abbildung 2.12: Demonstration des Drehimpulserhaltungssatzes: Student auf Drehschemel.

Das Trägheitsmoment J_1 für die ausgestreckten Arme ist größer als J_2, und damit ist klar, dass $\omega_2 > \omega_1$. In einem weiteren Beispiel sitzt der Freiwillige immer noch auf dem ruhenden Drehschemel und hält ein sich drehendes Rad in der Hand (siehe Abb. 2.12). Dreht er das Rad um 180°, dann versetzt er sich selbst in eine Drehbewegung. Auch dieses Phänomen ist mit dem Drehimpulserhaltungssatz verständlich. Am Anfang gibt es nur den Drehimpuls des Rades $L_{\rm R}$. Nach dem Drehen des Rades haben wir einen Drehimpuls des Rades von $-L_{\rm R}$ und einen Drehimpuls der Person auf dem Drehschemel $L_{\rm P}$. Nach dem Drehimpulserhaltungssatz muss gelten

$$L_{\rm R} = -L_{\rm R} + L_{\rm P} \Leftrightarrow J_{\rm R}\,\omega_{\rm R} = -J_{\rm R}\,\omega_{\rm R} + J_{\rm P}\,\omega_{\rm P} \Leftrightarrow \omega_{\rm P} = \frac{2\,J_{\rm R}}{J_{\rm P}}\,\omega_{\rm R}.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts vergleichen wir in folgender Tabelle Größen der Translation und Rotation.

Translation		Rotation	
Weg	s	φ	Winkelverschiebung
Geschwindigkeit	$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	Winkelbeschleunigung
Masse	m	$J = \sum_i m_i\, r_i^2$	Trägheitsmoment
Kraft	$F = m\,a$	$M = J\,\alpha$	Drehmoment
Impuls	$p = m\,v$	$l = J\,\omega$	Drehimpuls
Kinetische Energie	$W_{\rm kin} = \frac{1}{2}\,m\,v^2$	$W_{\rm rot} = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2$	Rotationsenergie

2.9 Gleichgewicht

Ein Körper befindet sich im statischen Gleichgewicht, falls der Körper weder eine Translation noch eine Rotation ausführt. Die Bedingungen hierfür können wir mit Hilfe des Zweiten Newtonschen Gesetzes für die Translation und Rotation mathematisch formulieren. Translatorisches Gleichgewicht liegt vor, falls die Resultierende der äußeren Kräfte verschwindet, falls also gilt

$$\vec{F}_{\text{ges}} = 0. \tag{2.133}$$

Für das rotatorische Gleichgewicht muss die Resultierende der äußeren Drehmomente, die auf den Körper wirken, verschwinden, also

$$\vec{M}_{\text{ges}} = 0. \tag{2.134}$$

Im statischen Gleichgewicht ruht der Körper, d. h. sein Impuls verschwindet, also

$$\vec{P} = 0. \tag{2.135}$$

Diese drei Gleichungen beschreiben das statische Gleichgewicht eines Körpers. Beachten Sie, dass alle Gleichungen Vektorgleichungen sind - jede Komponente der betrachteten Größe verschwindet im Gleichgewicht.

Als ein erstes Beispiel betrachten wir den zweiseitigen Hebel. Denken Sie sich einen Balken, der um eine feste Drehachse, die senkrecht zu seiner Längsachse verlaufe, drehbar gelagert sei. An den Enden des Balkens wirken Kr̈afte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ senkrecht nach unten. Die Angriffspunkte der Kräfte seien r_1 bzw. r_2 von der Drehachse entfernt. Der Hebel befindet sich im statischen Gleichgewicht, falls $\vec{M}_{\text{ges}} = 0$ (die Drehachse ist fest, so dass eine Translation nicht zustande kommt). Wir nehmen an, dass die Kräfte senkrecht zu den Hebelarmen wirken. Damit können wir unter Beachtung der Vorzeichenkonvention für die Drehbewegung schreiben

$$r_1\, F_1 = r_2\, F_2 \Leftrightarrow F_1 = \frac{r_2}{r_1}\, F_2. \tag{2.136}$$

Man kann also einer größeren Kraft F_1 mit einer kleineren Kraft F_2 das Gleichgewicht halten, wenn man für F_2 den größeren Hebelarm wählt. Man nennt den Quotienten $\frac{r_2}{r_1}$ das Übersetzungsverhältnis.

Ein weiteres Beispiel ist das Wellrad. Denken Sie sich dazu zwei konzentrische zylindrische Scheiben mit Radien $r_1 < r_2$. Im gemeinsamen Zentrum befinde sich die feste Drehachse senkrecht zu den Scheiben. Mit Hilfe einer Schnur hängen wir Gewichte an gegenüber liegenden Stellen des Wellrads, so dass die Gewichtskraft F_1 im Abstand r_1 und die Gewichtskraft F_2 im Abstand r_2 von der Drehachse angreifen. Wir finden für das statische Gleichgewicht dieselbe Formel wie für den zweiseitigen Hebel. Wir machen uns hier klar, dass wir mit diesen einfachen Maschinen lediglich eine Kraftersparnis hervorrufen, niemals aber eine Arbeitsersparnis. Dazu drehen wir das Wellrad um den Winkel φ. Dies entspricht einem Bogen $d_1 = r_1\, \varphi$ auf der inneren Scheibe und einem Bogen $d_2 = r_2\, \varphi$ auf der äußeren Scheibe. Wir berechnen die mechanische Arbeit, die zur Drehung der Scheibe verrichtet werden muss. Dazu gilt

$$W_1 = M_1\, \varphi = r_1\, F_1\, \varphi.$$

Wegen des statischen Gleichgewichts gilt nun $r_1\, F_1 = r_2\, F_2$, so dass wir schreiben können

$$W_1 = r_2\, F_2\, \varphi = M_2\, \varphi = W_2.$$

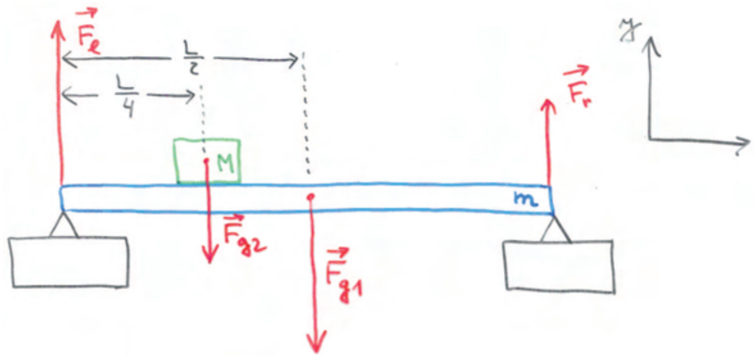

Abbildung 2.13: Ein Beispiel zum statischen Gleichgewicht.

Dies bedeutet aber, dass wir keine Arbeit gespart haben.

Das dritte Beispiel finden Sie in Abbildung 2.13. Ein Balken der Länge L und Masse $m = 1{,}8\,\mathrm{kg}$ liege mit seinen Enden auf Waagen. Ein Körper der Masse $M = 2{,}7\,\mathrm{kg}$ liege $\frac{L}{4}$ von der linken Waage entfernt. Wir fragen nach den Anzeigen der linken und rechten Waage, wenn sich das System im statischen Gleichgewicht befindet. Zur Lösung der Aufgabe legen wir zuerst ein Koordinatensystem fest (siehe Abbildung). Danach schreiben wir die Bedingungen für das translatorische Gleichgewicht auf, also

$$F_\mathrm{l} + F_\mathrm{r} - m\,g - M\,g = 0.$$

F_l und F_r sind die gesuchten Normalkräfte der Waagen auf das linke bzw. rechte Ende des Balkens. Für die Gewichtskräfte haben wir $F_\mathrm{g1} = m\,g$ und $F_\mathrm{g2} = M\,g$ geschrieben. Beachten Sie die richtige Vorzeichenwahl nach der Festlegung des Koordinatensystems. Obige Gleichung enthält zwei Unbekannte, so dass wir eine weitere Gleichung zur Bestimmung benötigen. Dazu schreiben wir die Bedingung für das rotatorische Gleichgewicht auf. Typischerweise legt man die Drehachse des Systems durch den Angriffspunkt einer Kraft, so dass letztere kein Drehmoment bewirkt. Wir wählen hier etwa das linke Ende des Balkens als Drehachse, dann erhalten wir für die Summe der Drehmomente um diese Achse (beachten Sie die Vorzeichenkonvention für die Drehbewegung):

$$F_\mathrm{l} \times 0 - M\,g\,\frac{L}{4} - m\,g\,\frac{L}{2} + F_\mathrm{r}\,L = 0.$$

Wir können obige Gleichung nach F_r auflösen:

$$F_\mathrm{r} = \frac{1}{2}\,(m + \frac{1}{2}\,M)\,g \approx 15\,\mathrm{N}.$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die Gleichung für das translatorische Gleichgewicht ein und erhalten:

$$F_\mathrm{l} = (m + M)\,g - F_\mathrm{r} \approx 29\,\mathrm{N}.$$

Das letzte Beispiel behandelt einen Bergsteiger ($m = 55\,\mathrm{kg}$), der sich in einem Kamin ausruht (siehe Abb. 2.14). Der Bergsteiger klemmt sich derart ein, dass er sich minimal anstrengen muss. Daher fragen wir nach der minimalen Kraft, die er auf die Wände des Kamins ausüben muss. Die Reibungskraft zwischen seinen Füßen und der Wand sei F_1 und charakterisiert durch den Haftreibungskoeffizienten $\mu_1 = 1{,}1$. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Schulter und Wand

Abbildung 2.14: Statisches Gleichgewicht beim Bergsteiger.

sei $\mu_2 = 0{,}7$. Die Breite des Kamins betrage $w = 1\,\mathrm{m}$. Der Schwerpunkt des Bergsteigers sei $d = 20\,\mathrm{cm}$ von der rechten Wand entfernt. Die Bedingung für das translatorische Gleichgewicht lautet (beachten Sie die Festlegung des Koordinatensystems):

$$F_1 + F_2 - F_\mathrm{g} = 0.$$

Somit erhalten wir

$$\mu_1\, N + \mu_2\, N - m\, g = 0 \Leftrightarrow N = \frac{m\, g}{\mu_1 + \mu_2} \approx 300\,\mathrm{N}.$$

Die minimale Kraft beträgt also etwa 300 N. Jetzt fragen wir nach dem Abstand h zwischen Schulter und Füßen, so dass diese minimale Kraft aufgebracht wird. Dazu schreiben wir die Bedingung für das rotatorische Gleichgewicht auf und legen die Drehachse an die Füße des Bergsteigers. Dann ergibt sich:

$$N\, h - m\, g\, (w - d) + F_2\, w = 0.$$

Diese Gleichung lösen wir nach h auf und setzen ein:

$$h = \frac{m\, g\, (w - d) - \mu_2\, N\, w}{N} \approx 74\,\mathrm{cm}.$$

2.10 Flüssigkeiten und Gase

In den vergangenen Abschnitten haben wir uns um einzelne Massenpunkte und starre Körper gekümmert. Wir wenden uns nun den Flüssigkeiten und Gasen zu. Letztere spielen eine große Rolle in unserem Leben, da wir trinken und atmen; Blut fließt in unseren Adern; der Traktor fährt mit flüssigem Benzin, und seine Reifen sind mit Luft aufgepumpt.

Im Gegensatz zu festen Körpern können Flüssigkeiten und Gase fließen bzw. strömen. Außerdem nehmen sie die Form des Gefäßes an, in welchem man sie aufbewahrt.

2.10.1 Dichte und Druck

Wir definieren zunächst die Dichte ϱ über

$$\varrho = \frac{m}{V}, \tag{2.137}$$

worin m die Masse und V das eingenommene Volumen bedeuten. Die Einheit der Dichte ist

$$[\varrho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}. \tag{2.138}$$

Als nächste Größe definieren wir den Druck p gemäß

$$p = \frac{F}{A}, \tag{2.139}$$

wobei F die Kraftkomponente senkrecht zur Fläche A ist. Die Einheit des Drucks ist

$$[p] = \text{Pascal} = \text{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}. \tag{2.140}$$

Beachten Sie, dass der Druck eine skalare Größe ist - in die Formel geht lediglich der Betrag des Vektors der Kraft ein.

Betrachten wir nun ein Gefäß mit einer ruhenden Flüssigkeit (es herrsche also statisches Gleichgewicht). Wir fragen nach dem sogenannten hydrostatischen Druck oder Schweredruck, den beispielsweise ein Taucher in der Tiefe h unter dem Flüssigkeitsspiegel erfährt. Wir legen die y-Achse so fest, dass positive Werte nach oben zeigen und der Nullpunkt mit dem Flüssigkeitsspiegel übereinstimmt. In Gedanken zeichnen wir einen Quader in die Flüssigkeit, der eine Höhe $y_1 - y_2$ besitze (y_1 und y_2 sind negative Zahlen). Die Fläche der Größe A sei parallel zum Flüssigkeitsspiegel orientiert. Wir haben vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit im statischen Gleichgewicht sei. Unser willkürlich herausgegriffene Quader ist daher auch in Ruhe. Alle angreifenden Kräfte halten sich also die Waage: die auf seine obere Grenzfläche wirkende Kraft F_1 (verursacht von der Flüssigkeitssäule über ihm), die auf seine untere Grenzfläche wirkende Kraft F_2 und die am Schwerpunkt angreifende Gravitationskraft. Wir schreiben (Vorzeichen beachten):

$$-F_1 + F_2 - m\,g = 0 \Leftrightarrow F_2 = F_1 + m\,g.$$

Unter Verwendung von $F_1 = p_1\,A$, $F_2 = p_2\,A$, $m = \varrho\,V$ und $V = A\,(y_1 - y_2)$ erhalten wir

$$p_2 = p_1 + \varrho\,g\,(y_1 - y_2).$$

Wollen wir nun den Druck in der Tiefe h berechnen, dann setzen wir $y_1 = 0$ (Flüssigkeitsspiegel), $p_1 = p_0$ (Luftdruck), $y_2 = -h$ (Tiefe) und $p_2 = p$ (gesuchter hydrostatischer Druck) und erhalten

$$p = p_0 + \varrho\,g\,h. \tag{2.141}$$

Beachten Sie, dass der hydrostatische Druck nur von der Höhe der Flüssigkeitssäule, nicht aber von der Form des Gefäßes abhängt (hydrostatisches Paradoxon).

Wir behandeln ein erstes Beispiel. Denken Sie sich ein U-Rohr, das mit Öl und Wasser gefüllt sei. Der Ölspiegel (linke Seite des U-Rohrs) liege $d = 12{,}3\,\mathrm{mm}$ über dem Wasserspiegel; der Wasserspiegel sei $l = 135\,\mathrm{mm}$ oberhalb von der Grenzfläche Öl-Wasser entfernt. Mit diesen Messdaten suchen wir nun die Dichte des Öls. Wir gehen davon aus, dass sich beide Flüssigkeiten im statischen Gleichgewicht befinden. Der Schweredruck der Ölsäule an der Grenzfläche Öl-Wasser beträgt

$$p_\mathrm{O} = p_0 + \varrho_\mathrm{O}\, g\, (l + d)$$

und hält dem Schweredruck des Wassers die Waage. Letzterer lautet

$$p_\mathrm{W} = p_0 + \varrho_\mathrm{W}\, g\, l.$$

Wir erhalten also

$$p_\mathrm{O} = p_\mathrm{W} \Leftrightarrow p_0 + \varrho_\mathrm{O}\, g\, (l + d) = p_0 + \varrho_\mathrm{W}\, g\, l \Leftrightarrow \varrho_\mathrm{O} = \frac{l}{l + d}\, \varrho_\mathrm{W}.$$

Mit $\varrho_\mathrm{W} = 998\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und obigen Abmessungen berechnen wir

$$\varrho_\mathrm{O} = \frac{135\,\mathrm{mm}}{135\,\mathrm{mm} + 12{,}3\,\mathrm{mm}}\, 998\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \approx 915\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Zur Druckmessung kann man beispielsweise ein Quecksilber-Barometer verwenden. Dazu füllen Sie etwa ein Reagenzglas mit Quecksilber und drehen es derart in einer mit Quecksilber gefüllten Schale um, dass keine Luft von außen eindringt. In diesem Fall ist der Raum zwischen der Bewandung des Quecksilberröhrchens und dem oberen Quecksilberspiegel lediglich mit Quecksilberdampf sehr geringen Drucks gefüllt. Die Höhe der Quecksilbersäule entspricht nun dem Atmosphärendruck, der auf dem Quecksilberspiegel in der Schale wirkt. Verringert (vergrößert) sich letzterer, dann sinkt (steigt) der Quecksilberspiegel im Röhrchen. Setzen wir in der Formel für den Schweredruck $y_1 = 0$, $p_1 = p_0$, $y_2 = h$ und $p_2 = 0$, dann können wir den Luftdruck p_0 über

$$p_0 = \varrho\, g\, h$$

berechnen.

2.10.2 Das Prinzip von Pascal

Wenn Sie das nächste Mal auf Ihre Zahnpastatube drücken, dann denken Sie vielleicht daran, dass die Zahnpasta aufgrund von Pascals Prinzip herausströmt. Blaise Pascal hat 1652 klar formuliert:

> Eine Druckänderung, die auf eine inkompressible Flüssigkeit ausgeübt wird, verteilt sich unvermindert an jeden Punkt der Flüssigkeit und an die Bewandung des Gefäßes.

Sehr eindrücklich lässt sich das Pascalsche Prinzip an der hydraulischen Presse demonstrieren (siehe Abb. 2.15). Wie wir gleich sehen werden, ist so ein Aufbau in der Lage, die Kraft F_1, die auf die Fläche A_1 des linken Stemples wirkt, zu vergrößern. Man kann also einer größeren Kraft F_2, die auf den rechten Stempel der Fläche A_2 wirkt, mit einer kleineren Kraft F_1, die auf den linken Stempel wirkt, das Gleichgewicht halten. Die Druckänderung, die von der Kraft F_1 im Öl verursacht wird, lässt sich mittels

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1}$$

berechnen. Pascals Prinzip besagt, dass diese Druckänderung sich zum rechten Stempel fortpflanzt, also

$$p_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} = p_1 \Leftrightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1}\, F_1.$$

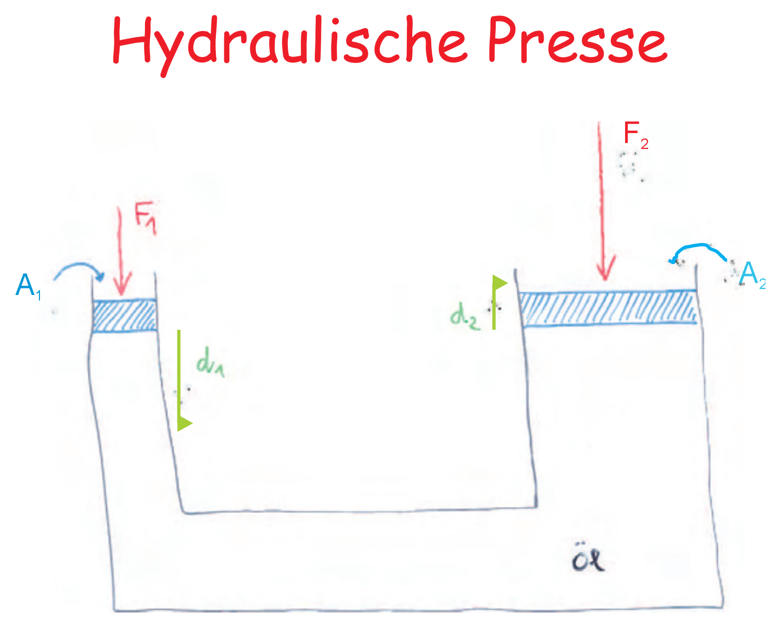

Abbildung 2.15: Ein Beispiel zum Pascalschen Prinzip: die hydraulische Presse.

Falls also $A_2 > A_1$, dann ist auch $F_2 > F_1$. Ähnlich wie beim Hebel und Wellrad wird hier betont, dass die hydraulische Presse zwar für eine Kraftersparnis, nicht aber für eine Arbeitsersparnis sorgt. Versenken Sie etwa den linken Stempel um eine Strecke d_1, dann verrichten Sie die mechanische Arbeit

$$W_1 = F_1\,d_1.$$

Sie haben außerdem das Volumen

$$V_1 = A_1\,d_1$$

verdrängt. Da die hydraulische Presse kein Leck hat, gilt

$$V_2 = A_2\,d_2 = A_1\,d_1 = V_1 \Leftrightarrow d_1 = \frac{A_2}{A_1}\,d_2.$$

Daher folgt für die verrichtete Arbeit:

$$W_1 = F_1\,d_1 = \frac{A_1}{A_2}\,F_2\,\frac{A_2}{A_1}\,d_2 = F_2\,d_2 = W_2.$$

Die verrichtete Arbeit bleibt also konstant.

2.10.3 Das Prinzip von Archimedes

Denken Sie sich wieder ein Gefäß mit einer ruhenden Flüssigkeit. Jedes willkürlich gewählte Volumen innerhalb der Flüssigkeit befindet sich im statischen Gleichgewicht. Dies bedeutet aber insbesondere, dass die Gravitationskraft kompensiert wird durch eine entgegengesetzt gleich große Kraft. Dies ist die Auftriebskraft, die dadurch entsteht, dass der Schweredruck am unteren Teil des willkürlich gewählten Flüssigkeitsvolumens größer ist als der Schweredruck am oberen Teil. Insgesamt resultiert die nach oben gerichtete Auftriebskraft. Wir können also festhalten, dass die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft des ausgewählten Flüssigkeitsvolumens ist. Machen Sie nun folgendes Gedankenexperiment: lösen Sie das ausgewählte Volumen aus der Flüssigkeit heraus und stopfen Sie die zurückbleibende Lücke mit einem Stück Holz oder einem Klumpen Blei. Da wir nichts an der Form der Lücke geändert haben, bleibt die Auftriebskraft dieselbe (sowohl für das Holzstück als auch für den Bleiklumpen). Allerdings herrscht für die Körper kein statisches Gleichgewicht mehr: der Bleiklumpen wird sinken, da die Gravitationskraft größer als die Auftriebskraft ist; das Holzstück wird aus analogen Gründen an die Wasseroberfläche bewegt. Unser Gedankenexperiment zeigt aber, dass die Auftriebskraft lediglich von der verdrängten Flüssigkeitsmenge abhängt. Damit können wir das Prinzip von Archimedes formulieren:

> Die nach oben gerichtete Auftriebskraft F_A, die ein Körper in einer Flüssigkeit erfährt, ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit:
>
> $$F_\mathrm{A} = \varrho_\mathrm{Fl}\, g\, V_\mathrm{K} \tag{2.142}$$
>
> (ϱ_Fl: Dichte der Flüssigkeit, V_K: Volumen des Körpers).

Mit Hilfe der Auftriebs- und Gravitationskraft können wir die Bedingungen für das Schwimmen, Schweben und Sinken eines Körpers einfach festlegen: ein Körper schwimmt, falls die Auftriebskraft größer als die Gravitaionskraft ist, also $F_\mathrm{A} > F_\mathrm{g}$; Schweben in der Flüssigkeit findet statt, falls $F_\mathrm{A} = F_\mathrm{g}$; der Körper sinkt schließlich, falls $F_\mathrm{A} < F_\mathrm{g}$. Wegen der Auftriebskraft fühlen sich Körper in Flüssigkeiten leichter an. Man kann diesem Phänomen durch die scheinbare Gewichtskraft Rechnung tragen. Man definiert die scheinbare Gewichtskraft G_s über

$$G_\mathrm{s} = G - F_\mathrm{A}, \tag{2.143}$$

worin G die Gewichtskraft des Körpers bedeutet.

Als Beispiel berechnen wir den Anteil eines Eisberges, der über dem Meeresspiegel liegt. Der Eisberg habe das (unbekannte) Volumen V; über dem Meeresspiegel liege ein Volumen V_s. Da der Eisberg schwimmt, können wir schreiben

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{A} \Leftrightarrow m\, g = \varrho_\mathrm{W}\, g\, (V - V_\mathrm{s}) \Leftrightarrow \varrho_\mathrm{E}\, V\, g = \varrho_\mathrm{W}\, g\, (V - V_\mathrm{s}).$$

Wir haben verwendet, dass die Masse des Eisbergs sich über $m = \varrho_\mathrm{E}\, V$ (ϱ_E: Eisdichte) berechnen lässt. Die Auftriebskraft enthält lediglich das Volumen der verdrängten Flüssigkeit, also $V - V_\mathrm{s}$. Löst man obige Gleichung nach $\frac{V_\mathrm{s}}{V}$ auf, dann erhält man

$$\frac{V_\mathrm{s}}{V} = 1 - \frac{\varrho_\mathrm{E}}{\varrho_\mathrm{W}}.$$

Einsetzen von $\varrho_\mathrm{E} = 917\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und $\varrho_\mathrm{W} = 1024\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ (Dichte des Meereswassers) liefert schließlich

$$\frac{V_\mathrm{s}}{V} = 1 - \frac{917}{1024} \approx 10\,\%.$$

Also sind etwa 10 % des Eisbergs sichtbar.

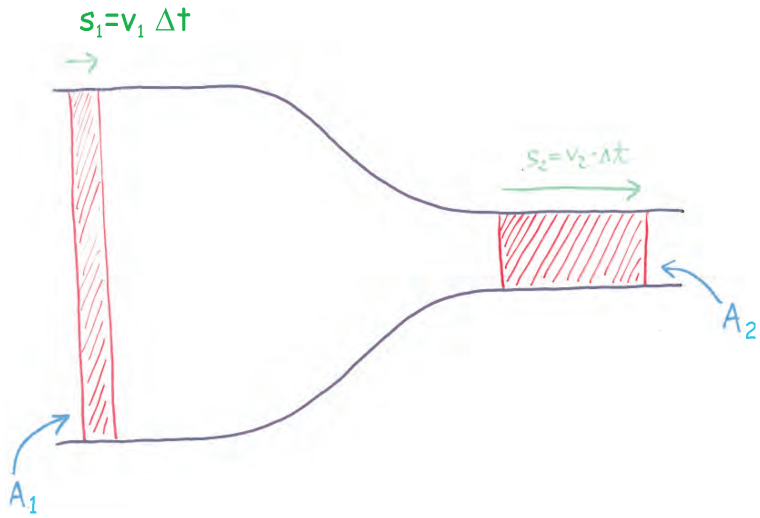

Abbildung 2.16: Skizze zur Kontinuitätsgleichung.

2.10.4 Strömende Flüssigkeiten und Gase

Nachdem wir in den vorangehenden Abschnitten Eigenschaften ruhender Flüssigkeiten und Gase untersucht haben, beschäftigen wir uns nun mit bewegten Flüssigkeiten und Gasen. Wir schränken unsere Diskussion auf sogenannte ideale Strömungen ein. Diese haben folgende Eigenschaften.

- Laminare Strömung: Betrag und Richtung der Geschwindigkeit an jedem beliebigen Punkt der strömenden Flüssigkeit ändern sich nicht.
- Inkompressible Strömung: Dichte ist überall konstant.
- Nichtviskose Strömung: Reibungsfrei.

Für diese ideale Strömung stellen wir im Folgenden einige Gesetze auf. Aus dem Alltag ist Ihnen bekannt, dass man die Strömungsgeschwindigkeit über die Größe des Querschnitts, durch den etwa Wasser strömt, beeinflussen kann. Denken Sie etwa an das Wasserspritzen aus einem Schlauch oder aus einem Wasserhahn, den Sie mit Ihrem Daumen nahezu verschließen. Die Kontinuitätsgleichung verknüpft die Strömungsgeschwindigkeit mit der Querschnittsfläche. Betrachten Sie dazu Abbildung 2.16. Diese zeigt etwa einen Schlauch, der links eine große Querschnittsfläche A_1 und rechts eine kleinere Querschnittsfläche A_2 besitzt. Da wir inkompressible Strömungen betrachten, darf es im Schlauch keine Stauungen geben. Infolgedessen muss ein ausgewähltes Wasservolumen in einer gegebenen Zeit Δt vollständig transportiert werden. Wir wählen ein solches Wasservolumen im linken Schlauchteil. Dort herrsche die Strömungsgeschwindigkeit v_1. In einer Zeit Δt kommt ein Flüssigkeitsteilchen die Strecke $s_1 = v_1\,\Delta t$ weiter. Wir betrachten jetzt das Wasservolumen $V_1 = A_1\,s_1 = A_1\,v_1\,\Delta t$. In derselben Zeit Δt muss dieses Wasservolumen auch durch das rechte Ende des Schlauches treten. Damit dies funktioniert, muss offenbar die Strömungsgeschwindigkeit v_2 in diesem Teil des Schlauches größer sein. Das Volumen können wir hier analog ausrechen zu $V_2 = A_2\,s_2 = A_2\,v_2\,\Delta t$. Beide Volumina sind

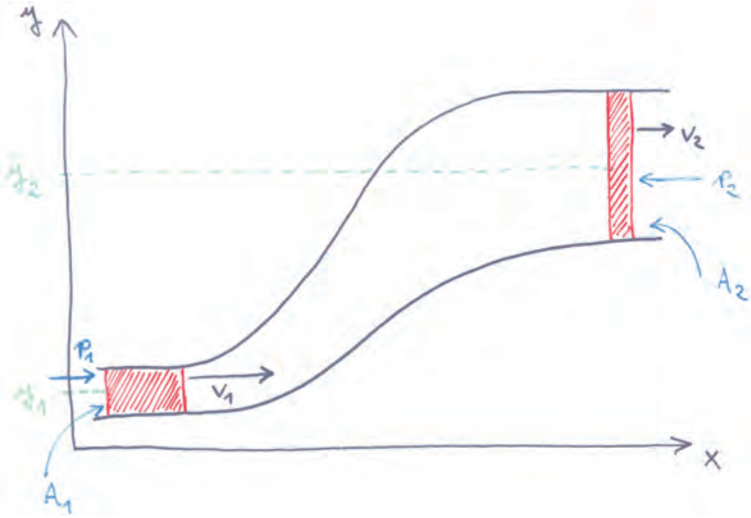

Abbildung 2.17: Skizze zur Bernoulli-Gleichung.

gleich groß, und nach Kürzen von Δt erhalten wir die Kontinuitätsgleichung

$$A_1 \, v_1 = A_2 \, v_2. \tag{2.144}$$

Sie sehen also, dass je kleiner (größer) man die Querschnittsfläche wählt, desto größer (kleiner) die Strömungsgeschwindigkeit wird. Jetzt denken Sie automatisch an das Erste Newtonsche Gesetz, denn dort steht geschrieben, dass eine Änderung der Bewegung durch äußere Kräfte vermittelt wird. Wir versuchen im Folgenden zu verstehen, warum die Flüssigkeitsteilchen etwa bei Verengungen schneller werden. Die Antwort finden wir in der Bernoulli-Gleichung. Betrachten Sie zur Herleitung Abb. 2.17. Im Diagramm ist wieder ein Schlauch mit unterschiedlich großen Querschnittsflächen abgebildet. Darüber hinaus muss die strömende Flüssigkeit einen Höhenunterschied $y_2 - y_1$ überwinden. Es leuchtet Ihnen ein, dass eine mechanische Arbeit von außen verrichtet werden muss, um die Flüssigkeit beständig strömen zu lassen. Um das markierte Wasservolumen im unteren Teil des Schlauches über eine Strecke s_1 zu transportieren, müssen wir die Arbeit

$$W_1 = F_1 \, s_1 = p_1 \, A_1 \, s_1 = p_1 \, V$$

verrichten. Dabei ist p_1 der aufzuwendende Druck, A_1 die Größe der Querschnittsfläche und V das Volumen der betrachteten Flüssigkeitsmenge. Diese verrichtete Arbeit äußert sich in der Änderung der Lageenergie

$$\Delta W_{\text{pot}} = m \, g \, (y_2 - y_1) = \varrho \, V \, g \, (y_2 - y_1),$$

der Änderung der kinetischen Energie

$$\Delta W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \, m \, (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \, \varrho \, V \, (v_2^2 - v_1^2)$$

und der Verrichtung mechanischer Arbeit

$$W_2 = p_2 \, V.$$

Wir haben verwendet, dass sich die Masse m der betrachteten Flüssigkeitsmenge mit Hilfe der Dichte ϱ gemäß $m = \varrho V$ schreiben lässt. Weiter sind v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der strömenden Flüssigkeit unten und oben. Damit können wir die folgende Bilanzgleichung für die Energie aufschreiben

$$p_1 V = \varrho V g (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \varrho V (v_2^2 - v_1^2) + p_2 V.$$

Nach Kürzen von V erhalten wir die Bernoulli-Gleichung:

$$p_1 + \varrho g y_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \varrho g y_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 \tag{2.145}$$

oder

$$p + \varrho g y + \frac{1}{2} \varrho v^2 = \text{const.} \tag{2.146}$$

Man bezeichnet p als den statischen Druck und $\frac{1}{2} \varrho v^2$ als den dynamischen Druck. In der Bernoulli-Gleichung ist zum Beispiel der Schweredruck einer ruhenden Flüssigkeit ($v = 0$) enthalten. Ist kein Höhenunterschied zu überwinden ($y_1 = y_2$), dann gilt

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2.$$

Reduziert sich also die Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit, dann muss der Druck der Flüssigkeit steigen (und umgekehrt). Beachten Sie, dass die Bernoulli-Gleichung nur für die ideale Strömung gilt - insbesondere setzen wir nicht-viskose, also reibungsfreie, Strömung voraus. Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung können wir die oben formulierte Kontinuitätsgleichung besser verstehen. Bei unterschiedlich schnell fließender Flüssigkeit ändert sich gemäß der Bernoulli-Gleichung der statische Druck. Letzterer übt dann eine beschleunigende Kraft auf die Flüssigkeitsteilchen aus. Damit können wir also das Schneller- oder Langsamerwerden der Strömung verstehen.

Wir behandeln ein Beispiel zur Kontinuitäts- und Bernoulli-Gleichung. In einen Wassertank der Querschnittsfläche A_0 werde in der Höhe h unterhalb des Wasserspiegels ein kleines Loch mit der Querschnittsfläche A_1 gebohrt. Wie groß ist die Geschwindigkeit v_1 des durch diese Öffnung strömenden Wassers? Um die Gleichung von Bernoulli anwenden zu können, legen wir das Nullniveau auf die Höhe der kleinen Bohrung. Wir beachten weiter, dass der äußere Luftdruck p_0 sowohl auf dem Wasserspiegel als auch auf dem austretenden Wasser lastet. Damit können wir die Bernoulli-Gleichung aufschreiben:

$$p_0 + \frac{1}{2} \varrho v_0^2 + \varrho g h = p_0 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2.$$

v_0 bezeichnet hier die Geschwindigkeit der strömenden Flüssigkeit ganz oben im Tank. Die Kontinuitätsgleichung verknüpft v_0 und v_1 über die Querschnittsflächen mittels

$$A_0 v_0 = A_1 v_1 \Leftrightarrow v_0 = \frac{A_1}{A_0} v_1.$$

Wir nehmen an, dass die Querschnittsfläche A_1 sehr viel kleiner als A_0 sei, dann ist der Quotient $\frac{A_1}{A_0}$ eine Zahl, die viel kleiner als 1 ist. In diesem Fall ist v_0 viel kleiner als v_1, und wir lassen sie in der Bernoulli-Gleichung aus diesem Grund wegfallen. Somit haben wir

$$\varrho g h = \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2 g h}.$$

Dieses Ergebnis ist Ihnen aus der Behandlung des freien Falls geläufig.

2.11 Schwingungen

Wenn Sie betrachten, wie häufig im Alltag Schwingungen auftreten, dann lohnt es sich, diese Schwingungserscheinungen genauer unter die Lupe zu nehmen. Denken Sie etwa an Gitarrensaiten, an den Quartzkristall in Ihrer Uhr oder an die Elektronen in den Antennen. Wir werden im Folgenden periodische Vorgänge charakterisieren und zum Schluss das Mathematische Pendel behandeln.

2.11.1 Einfache harmonische Bewegung

In der Vorlesung haben Sie schon häufig eine schwingende Feder gesehen. Wir betrachten die Bewegung eines Körpers, der an der Feder aufgehängt ist, als eine periodische Bewegung, also als eine Bewegung, die sich in regelmäßigen Zeitabständen selbst wiederholt. So eine Bewegung bezeichnen wir im Folgenden auch als eine einfache harmonische Bewegung. Um harmonische Bewegungen mathematisch zu beschreiben, verwendet man Sinus- oder Kosinusfunktionen. Die harmonische Bewegung entlang der x-Achse könnten wir also schreiben als

$$x(t) = x_0 \cos(\omega\, t + \varphi). \tag{2.147}$$

$x(t)$ bezeichnet die Auslenkung oder die Elongation zum Zeitpunkt t; die maximale Auslenkung ist die Amplitude x_0; ω ist die Kreisfrequenz und φ der Phasenwinkel. Mit Hilfe des Phasenwinkels können Sie die Kosinuskurve entlang der x-Achse verschieben - wählen Sie etwa $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, dann erhalten Sie die Sinuskurve. Nach der Periodendauer T wiederholt sich die harmonische Bewegung, d. h.

$$x(t + T) = x(t).$$

Daraus ergibt sich für die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\, f, \tag{2.148}$$

wenn wir den schon bekannten Zusammenhang zwischen Frequenz f und Periodendauer T

$$f = \frac{1}{T}$$

einsetzen. Da wir das Weg-Zeit-Gesetz $x(t)$ für die einfache harmonische Bewegung kennen, können wir mit den uns bekannten Regeln aus der Kinematik auch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung berechnen:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega\, x_0 \sin(\omega\, t + \varphi) \tag{2.149}$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega^2\, x_0 \cos(\omega\, t + \varphi) = -\omega^2\, x(t) \tag{2.150}$$

Die letzte Formel zeigt eine charakteristische Eigenschaft der harmonischen Bewegung: die Beschleunigung ist proportional zur Auslenkung und ihr entgegengerichtet.

2.11.2 Kraftgesetz für die einfache harmonische Bewegung

Kraft und Beschleunigung hängen nach dem Zweiten Newtonschen Gesetz über $F = m\,a$ zusammen. Wir haben gerade gesehen, dass die Beschleunigung bei der einfachen harmonischen Bewegung proportional zur Auslenkung ist. Damit gilt für die Kraft

$$F = -m\,\omega^2\,x. \tag{2.151}$$

Setzen Sie $k = m\,\omega^2$, dann erhalten Sie das Ihnen vertraute Hookesche Gesetz. Eine einfache harmonische Bewegung wird also durch eine Kraft erzeugt, die proportional zur Auslenkung und letzterer entgegengesetzt ist.

2.11.3 Energie der einfachen harmonischen Bewegung

Stellvertretend für alle harmonischen Bewegungen bleiben wir beim Beispiel der schwingenden Feder. Die elastische Energie kennen Sie schon:

$$W_\mathrm{s}(t) = \frac{1}{2}\,k\,x(t)^2 = \frac{1}{2}\,k\,x_0^2\,\cos^2(\omega\,t + \varphi).$$

Die kinetische Energie lautet:

$$W_\mathrm{kin}(t) = \frac{1}{2}\,m\,v(t)^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x_0^2\,\sin^2(\omega\,t + \varphi) = \frac{1}{2}\,k\,x_0^2\,\sin^2(\omega\,t + \varphi).$$

In der letzten Gleichung haben wir $m\,\omega^2$ durch k ersetzt. Die gesamte mechanische Energie der schwingenden Feder ist demnach:

$$\begin{aligned} W_\mathrm{mec} &= W_\mathrm{s}(t) + W_\mathrm{kin}(t) \\ &= \frac{1}{2}\,k\,x_0^2\,\left[\cos^2(\omega\,t + \varphi) + \sin^2(\omega\,t + \varphi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\,k\,x_0^2. \end{aligned} \tag{2.152}$$

Beachten Sie, dass wir zur Berechnung von W_mec den allgemeinen Zusammenhang

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

für einen beliebigen Winkel α verwendet haben. Während der Schwingung bleibt also die mechanische Energie eine Erhaltungsgröße.

2.11.4 Das Mathematische Pendel

Das Mathematische Pendel ist eine idealisierte Form des Pendels, d.h. der Körper der Masse m wird als ein Massenpunkt betrachtet und die Schnur zur Aufhängung des Massenpunktes als masselos angenommen. Wir werden zum Schluss des Abschnitts über Schwingungen die Bewegungsgleichung dieses Pendels herleiten. Betrachten Sie dazu Abb. 2.18. Das Seil zur Aufhängung habe die Länge L. Ausgelenkt werde um den Winkel φ. Die rückstellende Kraft, die den Massenpunkt der Masse m in die Gleichgewichtsposition bei $\varphi = 0$ bringen möchte, ist durch die Tangentialkomponente F_t der Gravitationskraft F_g gegeben, also (Orientierung der y-Achse beachten):

$$F_\mathrm{t} = -F_\mathrm{g}\,\sin\varphi = -m\,g\,\sin\varphi.$$

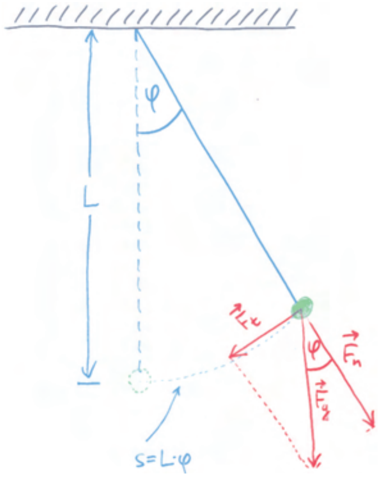

Abbildung 2.18: Mathematisches Pendel: Herleitung der Bewegungsgleichung.

Damit können wir das Drehmoment M ausrechnen, das die Gravitationskraft um den Drehpunkt ausübt (beachten Sie die Vorzeichenkonvention):

$$M = -F_\mathrm{t}\, L = -m\, g\, L\, \sin\varphi = J\, \alpha.$$

J ist das Trägheitsmoment des Pendels um seinen Drehpunkt und α die Winkelbeschleunigung. Wir erhalten also

$$\alpha = -\frac{m\, g\, L}{J}\, \sin\varphi.$$

Für kleine Auslenkwinkel φ können wir $\sin\varphi$ durch φ ersetzen. Dies demonstriert Ihnen die folgende Tabelle:

φ (im Gradmaß)	φ (im Bogenmaß)	$\sin\varphi$
0	0	0
1	0,017455	0,017453
2	0,034906	0,034899
3	0,052360	0,052360
4	0,069813	0,069756
5	0,087266	0,087156

Über 5° werden die Unterschiede zwischen φ im Bogenmaß und $\sin\varphi$ merklich. Mit der Näherung $\sin\varphi = \varphi$ schreiben wir für die Winkelbeschleunigung

$$\alpha = -\frac{m\, g\, L}{J}\, \varphi.$$

Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit der Beziehung für die translatorische Beschleunigung einer einfachen harmonischen Bewegung, nämlich $a = -\omega^2\, x$, dann sehen Sie mit Hilfe der Ersetzung

$$\omega^2 = \frac{m\, g\, L}{J},$$

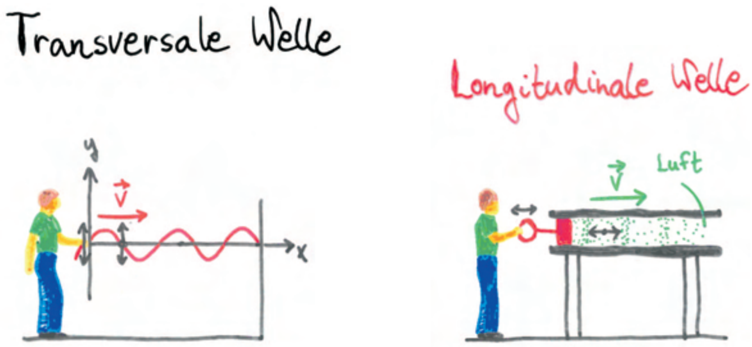

Abbildung 2.19: Transversale und longitudinale Welle.

dass für kleine Auslenkungen die Pendelbewegung auch eine einfache harmonische Bewegung darstellt. Die Periodendauer ist

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{J}{m\,g\,L}}.$$

Setzen wir für das Trägheitsmoment noch $J = m\,L^2$ ein, dann erhalten wir schließlich

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{2.153}$$

2.12 Wellen

Stellen Sie sich vor, dass der Dozent mit einer Studentin oder einem Studenten Kontakt aufnehmen möchte. Eine Alternative ist sicherlich, einen Brief zu schreiben. Bei dieser Art der Kommunikation bewegt sich also ein materielles Objekt von einem Punkt zum anderen und überträgt Information und Energie. Eine weitere Alternative ist das Telefongespräch. Auch hier wird Information und Energie übermittelt, allerdings wird kein materielles Objekt übertragen. Folgende Arten von Wellen gibt es:

- **Mechanische Wellen**, wie etwa Wasserwellen, Schall oder Erdbebenwellen - diese Wellen benötigen ein materielles Medium, um sich durch den Raum fortzupflanzen.
- **Elektromagnetische Wellen**, wie etwa Licht-, Radio- oder Radarwellen - diese Wellen benötigen kein materielles Medium zur Ausbreitung, sie bewegen sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit
$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$
- **Materiewellen**, die in der Quantenmechanik zur Beschreibung von Atomen und Elektronen verwendet werden.

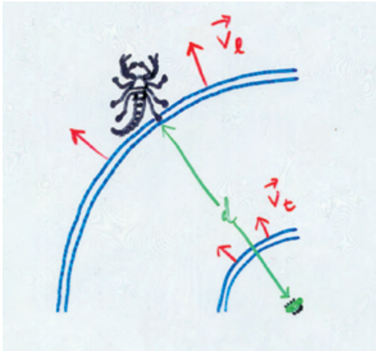

Abbildung 2.20: Lohnende Physik: Skorpion und Käfer.

2.12.1 Transversale und longitudinale Wellen

Eine Welle breite sich entlang der x-Achse aus. Falls die Teilchen des die Welle tragenden Mediums senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen, dann nennt man diese Welle eine transversale Welle (denken Sie an eine Wasserwelle). Abbildung 2.19 (linke Seite) veranschaulicht Ihnen die Erzeugung einer transversalen Seilwelle: die Ausbreitungsrichtung ist die x-Achse, die einzelnen Seilteilchen schwingen entlang der y-Achse. Schwingen die Teilchen des Mediums parallel zur Ausbreitungsrichtung, dann nennt man die Welle eine longitudinale. Der Schall ist etwa eine longitudinale Welle. Die rechte Seite der Abb. 2.19 zeigt Ihnen die Erzeugung einer solchen Welle. Beachten Sie, dass sich die Welle von einem Punkt zum anderen bewegt, nicht aber das Material des Mediums. Jedes Teilchen des Mediums vollführt lediglich eine Schwingung um seine Gleichgewichtslage. In der Natur nutzt der Skorpion bei der Jagd nach Beute die unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von longitudinalen und transversalen Wellen auf dem Erdboden aus. In Abb. 2.20 sehen Sie das Bild eines Skorpions, der es auf den fetten Käfer im Zentrum der von ihm beim (noch) lebhaften Krabbeln ausgesendeten transversalen und longitudinalen mechanischen Wellen abgesehen hat. Die Richtung des Käfers bestimmt der Skorpion wie folgt: seine Füße stellt er möglichst auf einer Kreislinie auf. Erreicht nun eine Welle einen seiner Füße, dann schließt er daraus auf die Richtung der Beute. Den Abstand ermittelt er durch den Zeitunterschied zwischen der Ankunft der longitudinalen und transversalen Welle. Wir nehmen an, dass die transversale Welle eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von $v_\mathrm{t} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ habe, die longitudinale Welle breite sich mit $v_\mathrm{l} = 150\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ aus. Befindet sich der Käfer im Abstand d vom Skorpion entfernt und beträgt der Zeitunterschied in der Ankunft der beiden Wellen an einem der Füße des Skorpions $\Delta t = 4\,\mathrm{ms}$, dann finden wir

$$\Delta t = \frac{d}{v_\mathrm{t}} - \frac{d}{v_\mathrm{l}} \Leftrightarrow d = \frac{\Delta t}{\frac{1}{v_\mathrm{t}} - \frac{1}{v_\mathrm{l}}}$$

und nach Einsetzen

$$d \approx 30\,\mathrm{cm}.$$

2.12.2 Mathematische Beschreibung von Wellen

Wir wollen jetzt mathematisch umsetzen, was wir schon längst wissen: die Welle ist eine Erscheinung, die sich periodisch in Zeit und Raum bewegt. Die Schwingung war lediglich periodisch in der Zeit. Betrachten wir zunächst eine transversale Welle, die sich entlang der positiven x-Achse ausbreite, dann gilt

$$y(x,t) = y_0 \sin(k\,x - \omega\,t). \tag{2.154}$$

$y(x,t)$ bezeichnet die Elongation eines Teilchens des Mediums am Ort x und zur Zeit t; y_0 ist die maximale Auslenkung der Teilchen, also die Amplitude; k heißt die Wellenzahl; das Argument der Sinusfunktion $k\,x - \omega\,t$ bezeichnet man als Phase. Die Wellenlänge λ gibt den räumlichen Abstand zwischen Orten gleicher Wellenformen (also etwa zweier Maxima oder Minima) an. Betrachten Sie einen Schnappschuss obiger Welle zur Zeit $t = 0$:

$$y(x,0) = y_0 \sin(k\,x).$$

Die Wellenlänge ist dann definiert über:

$$y(x_1,0) = y(x_1 + \lambda, 0) \tag{2.155}$$

für jeden beliebigen Ort x_1. Wir können die Wellenlänge und die Wellenzahl miteinander verknüpfen. Aus obiger Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} y_0 \sin(k\,x_1) &= y_0 \sin[k\,(x_1 + \lambda)] \\ &= y_0 \sin(k\,x_1 + k\,\lambda). \end{aligned}$$

Wegen der 2π-Periodizität der Sinusfunktion ist obige Gleichung erfüllt, falls

$$k\,\lambda = 2\,\pi \Leftrightarrow k = \frac{2\,\pi}{\lambda}. \tag{2.156}$$

Wir verfahren jetzt analog, um die Periodendauer T und die Kreisfrequenz ω miteinander zu verknüpfen. Sie erinnern sich, dass die Periodendauer einer Schwingung die Zeit zwischen gleichen Phasen einer Schwingung angibt. Also betrachten wir eine Welle am festen Ort $x = 0$:

$$y(0,t) = y_0 \sin(-\omega\,t) = -y_0\, sin(\omega\,t).$$

Dies ist aber, wie Sie wissen, die Gleichung für eine Schwingung. Irgendein Teilchen des die Welle tragenden Mediums führt also eine harmonische Schwingung um seine Gleichgewichtslage aus. Setzten wir nun die Definition der Periodendauer T ein, dann erhalten wir

$$y(0,t_1) = y(0, t_1 + T) \tag{2.157}$$

für jeden beliebigen Zeitpunkt t_1. Damit gilt

$$\begin{aligned} -y_0 \sin(\omega\,t_1) &= -y_0 \sin[\omega\,(t_1 + T)] \\ &= -y_0 \sin(\omega\,t_1 + \omega\,T). \end{aligned}$$

Nutzen wir wieder die 2π-Periodizität der Sinusfunktion aus, dann finden wir

$$\omega\,T = 2\,\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{2\,\pi}{T}. \tag{2.158}$$

Als Frequenz f der Welle definieren wir

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\,\pi}. \tag{2.159}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle lässt sich nun ganz einfach ableiten: um die Strecke einer Wellenlänge vorwärts zu kommen, benötigt die Welle die Periodendauer, d. h.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \lambda\, f. \tag{2.160}$$

Zum Schluss dieses Abschnitts behandeln wir ein Beispiel. Eine Seilwelle werde durch die Wellengleichung

$$y(x,t) = 0{,}00327\,\mathrm{m}\,\sin(72{,}1\,\frac{1}{\mathrm{m}}\,x - 2{,}72\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,t)$$

beschrieben. Die Amplitude der Welle lesen wir direkt ab zu

$$y_0 = 0{,}00327\,\mathrm{m} = 3{,}27\,\mathrm{mm}.$$

Die Wellenlänge ergibt sich aus der Wellenzahl:

$$k = 72{,}1\,\frac{1}{\mathrm{m}} \Rightarrow \lambda = \frac{2\,\pi}{k} = \frac{2\,\pi}{72{,}1\,\frac{1}{\mathrm{m}}} = 0{,}0871\,\mathrm{m} = 8{,}71\,\mathrm{cm}.$$

Die Periodendauer erhalten wir gemäß:

$$\omega = 2{,}72\,\frac{1}{\mathrm{s}} \Rightarrow T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{2{,}72\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 2{,}31\,\mathrm{s}.$$

Damit ist die Frequenz der Welle gegeben durch:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}31\,\mathrm{s}} = 0{,}433\,\mathrm{Hz}.$$

Als Ausbreitungsgeschwindigkeit erhalten wir:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2{,}72\,\frac{1}{s}}{72{,}1\,\frac{1}{\mathrm{m}}} = 0{,}0377\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3{,}77\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

Gefragt nach der Elongation eines Seilteilchens am Ort $x = 22{,}5\,\mathrm{cm}$ zur Zeit $t = 18{,}9\,\mathrm{s}$ können wir direkt antworten:

$$\begin{aligned} y(22{,}5\,\mathrm{cm}; 18{,}9\,\mathrm{s}) &= 0{,}00327\,\mathrm{m}\,\sin(72{,}1\,\frac{1}{\mathrm{m}} \times 0{,}225\,\mathrm{m} - 2{,}72\,\frac{1}{\mathrm{s}} \times 18{,}9\,\mathrm{s}) \\ &\approx 0{,}00192\,\mathrm{m} = 1{,}92\,\mathrm{mm}. \end{aligned}$$

2.12.3 Überlagerung von Wellen

Wenn Sie im Konzertsaal sitzen, dann registiert Ihr Trommelfell die Schallwellen verschiedener Instrumente gleichzeitig - der Klang, den Sie empfinden, entsteht also aus der Überlagerung mehrerer Schallwellen. Die Überlagerung von Wellen geschieht nach dem

> **Prinzip der Superposition.** Sich überlagernde Wellen addieren sich algebraisch und ergeben die resultierende Welle, also
>
> $$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t). \tag{2.161}$$
>
> Bei der Überlagerung stören sich die Wellen in keiner Weise bei ihrer Ausbreitung.

Das Superpositionsprinzip wird in Abb. 2.21 illustriert: Zwei Wellenzüge mit unterschiedlichen Amplituden laufen aufeinander zu. Die durchgezogene Linie ist die algebraische Summe aus beiden Wellen. Diese Summe wird maximal, wenn beide Maxima an genau derselben Stelle sind. Nach der Überlagerung laufen die Wellen ungestört weiter.

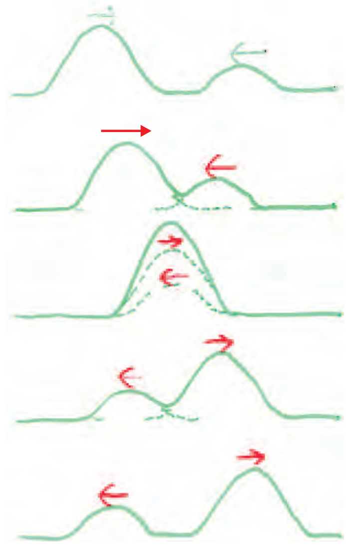

Abbildung 2.21: Überlagerung zweier Wellen.

2.12.4 Interferenz von Wellen

Wir wenden nun das eben vorgestellte Prinzip der Superposition auf einen Spezialfall an, in dem zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge und gleicher Amplitude in dieselbe Richtung laufen, also

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= y_0 \sin(k\,x - \omega\,t) \\ y_2(x,t) &= y_0 \sin(k\,x - \omega\,t + \varphi). \end{aligned}$$

Hierin ist φ eine Phasenkonstante, die die Verschiebung der beiden Wellen gegeneinander bestimmt. Die resultierende Welle erhalten wir aus dem Superpositionsprinzip zu

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_0 \sin(k\,x - \omega\,t) + y_0 \sin(k\,x - \omega\,t + \varphi) \\ &= \underbrace{2\,y_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\sin\left(k\,x - \omega\,t + \frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{oszillierenderTerm}}. \end{aligned}$$

Zunächst sehen Sie am oszillierenden Term, dass die resultierende Welle $y(x,t)$ wirklich eine Welle ist. Sie breitet sich mit derselben Wellenzahl k und derselben Kreisfrequenz ω wie die einzelnen Wellen $y_1(x,t)$ und $y_2(x,t)$ entlang der positiven x-Richtung aus. Die Amplitude der resultierenden Welle ist nun aber von der Phasenkonstante φ abhängig. Wir betrachten zwei Fälle. Im ersten Fall sei $\varphi = 0$, d. h. beide Wellen laufen mit gleicher Phase, sie sind nicht gegeneinander verschoben. Wegen $\cos 0 = 1$ ist die Amplitude der resultierenden Welle $2\,y_0$. Wir können also schreiben

$$y(x,t) = 2\,y_0 \sin(k\,x - \omega\,t).$$

Dies ist der Fall der maximalen Verstärkung beider Wellen, man nennt diese Überlagerung auch konstruktive Interferenz. Im zweiten Fall sei $\varphi = \pi$. Jetzt sind die beiden Wellen derart verschoben, dass ein Maximum der einen Welle genau auf ein Minimum der anderen Welle fällt. Die resultierende Elongation ist also Null. Wir halten fest

$$y(x,t) = 0.$$

Man nennt diesen Fall die Auslöschung beider Wellen oder destruktive Interferenz.

2.12.5 Stehende Wellen

In diesem Abschnitt überlagern wir zwei Wellen gleicher Amplitude, gleicher Wellenzahl und gleicher Kreisfrequenz, die sich in entgegengesetzte Richtungen bewegen. Die Welle, die sich in positiver x-Richtung ausbreitet, nennen wir

$$y_1(x,t) = y_0\,\sin(k\,x - \omega\,t).$$

Wie sieht nun eine Welle aus, die sich in negative x-Richtung ausbreitet? Dazu machen wir die folgende Plausibilitätsbetrachtung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer sich in die positive x-Richtung ausbreitenden Welle hatten wir weiter oben bestimmt zu

$$v_+ = \frac{\omega}{k}.$$

Wir erwarten, dass sich für eine in negative x-Richtung propagierende Welle das Vorzeichen der Geschwindigkeit umkehrt, also

$$v_- = -\frac{\omega}{k}.$$

Dieser Erwartung können wir Rechnung tragen, indem wir die Phase der Welle modifizieren, also schreiben

$$y_2(x,t) = y_0\,\sin(k\,x + \omega\,t).$$

Die Überlagerung beider Wellen geschieht wieder mit Hilfe des Superpositionsprinzips, also

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_0\,\sin(k\,x - \omega\,t) + y_0\,\sin(k\,x + \omega\,t) \\ &= \underbrace{2\,y_0\,\sin(k\,x)}_{\text{Amplitude}}\;\underbrace{\cos(\omega\,t)}_{\text{oszillierenderTerm}}\;. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist nun aber völlig verschieden von der Überlagerung zweier Wellen, die sich in derselben Richtung ausbreiten. Sie sehen nämlich, dass nun keine Welle mehr vorhanden ist (es fehlt die Phase $k\,x - \omega\,t$). Stattdessen sind $k\,x$ und $\omega\,t$ voneinander getrennt. Die Amplitude ändert sich mit dem Ort x. Es gibt Positionen der Welle, an denen die Auslenkung stets verschwindet. Diese Positionen nennt man Knoten. Zwischen den Knoten schwingen die Teilchen des die Welle tragenden Mediums auf und ab. Man nennt die Resultierende eine stehende Welle. Die Positionen der Knoten, also der Positionen verschwindender Elongation, erhalten wir gemäß

$$\begin{aligned} 2\,y_0\,\sin(k\,x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k\,x = n\,\pi \quad (n = 0,1,2,\ldots) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2\,\pi}{\lambda}\,x = n\,\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = n\,\frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \tag{2.162}$$

Die Knoten befinden sich also an Stellen, die Vielfache der halben Wellenlänge sind. Zwischen den Knoten gibt es Stellen, an denen eine Schwingung mit doppelter Amplitude vorliegt - dies

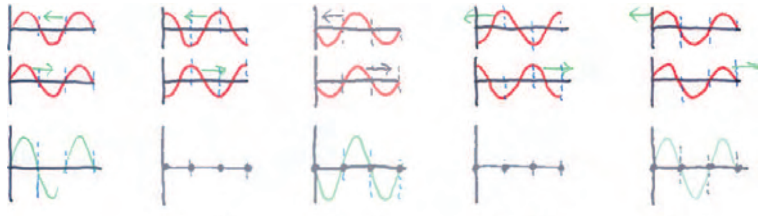

Abbildung 2.22: Erzeugung stehender Wellen.

sind die Bäuche der stehenden Welle. Wir erhalten die Positionen der Bäuche zu

$$\begin{aligned} 2\,y_0\,\sin(k\,x) = 2\,y_0 \quad &\Leftrightarrow \quad k\,x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\,\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2\,\pi}{\lambda}\,x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\,\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\,\frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \tag{2.163}$$

Stellen maximaler Elongation liegen also bei ungeraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{4}$. Abbildung 2.22 veranschaulicht in Form von Schnappschüssen die Ausbildung einer stehenden Welle. Sie sehen eine nach rechts und links propagierende Welle (gleicher Wellenlänge und Amplitude), die sich zur Zeit $t = 0$ maximal verstärken. Zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ (T ist die Periodendauer) fallen Maxima der einen Welle auf Minima der anderen Welle, so dass sich die Wellen auslöschen. Dieses Spiel der Auslöschung und Verstärkung können Sie bis zur Zeit $t = T$ verfolgen. Beachten Sie, dass die Resultierende keine Welle ist - Sie sehen Knoten und Bäuche, die nicht propagieren.

Stehende Wellen können Sie einfach auf eigene Faust erzeugen. Dazu benötigen Sie ein Seil, das Sie zur Überlagerung einer einlaufenden und reflektierten Welle verwenden. Zur Reflexion der Welle haben Sie zwei Möglichkeiten: Sie fixieren ein Seilende fest in der Wand, so dass es sich nicht bewegen kann. Trifft die einlaufende Welle auf diese Fixierung, dann bildet sich dort ein Knoten der resultierenden stehenden Welle aus. Man nennt dies die Reflexion am festen Ende. Sie können das Seilende aber auch an einen Ring knüpfen, der frei beweglich an einer Stange schwingen kann. Jetzt entsteht bei der Reflexion der einlaufenden Welle ein Bauch der resultierenden stehenden Welle. Man nennt dies die Reflexion am losen Ende. Die Reflexion von Wellen an festen oder losen Enden hat eine große Bedeutung etwa für Musikinstrumente. Denken Sie beispielsweise an eine Gitarrensaite, die an ihren Enden fest fixiert ist. Nach dem Anzupfen der Saite gibt es stehende Wellen, die an den Enden der Saite auf jeden Fall Knoten aufweisen. Die stehenden Wellen bilden sich aber nur für bestimmte Frequenzen aus. Dies sieht man wie folgt ein. Die Länge der Saite sei L. Die einfachste stehende Welle mit jeweils einem Knoten an den Enden der Saite wird erzeugt, falls eine halbe Wellenlänge zwischen den Enden eingesperrt wird. Die Bedingung für diese Grundschwingung ist also

$$\frac{\lambda}{2} = L. \tag{2.164}$$

Die sogenannte Erste Harmonische regen Sie an, falls Sie eine komplette Wellenlänge einsperren, also falls gilt

$$\lambda = L.$$

Allgemein gilt für die Anregung der n-ten Harmonischen

$$\lambda = \frac{2\,L}{n} \Leftrightarrow f = \frac{v}{\lambda} = n\,\frac{v}{2\,L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.165}$$

In obiger Beziehung bedeuten v und f die Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. die Frequenz der Welle. Über die Länge der Saite können Sie also die Frequenzen der schwingenden Saite festlegen. Die Erzeugung von Schwingungen bestimmter Frequenzen ist nicht auf die Gitarrensaite beschränkt. Auf ähnliche Weise werden Schallwellen in Orgelpfeifen erzeugt. Allerdings schwingt hier eine Luftsäule. Für eine Pfeife mit zwei offenen oder losen Enden gilt dieselbe Beziehung für die Erzeugung der n-ten Harmonischen wie bei der Saite, die zwischen zwei festen Enden eingespannt ist. Pfeifen der Länge L mit einem offenen und einem geschlossenen Ende weisen ihre Grundschwingung für

$$\frac{\lambda}{4} = L \tag{2.166}$$

auf. Die n-te Harmonische tritt auf, falls

$$\lambda = \frac{4\,L}{n} \Leftrightarrow f = n\,\frac{v}{4\,L} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \tag{2.167}$$

gilt. Sie sehen hieran, dass bei Pfeifen mit einem offenen und einem geschlossenen Ende nur Harmonische mit ungeradem n erzeugt werden können. Die Länge eines musikalischen Instruments verdeutlicht den Bereich der Frequenzen, für den das Instrument gebraucht wird. Je kleiner die Länge, desto höher sind die Frequenzen. Denken Sie etwa an das Saxophon. Die längste Ausführung für tiefe Töne ist das Bass-Saxophon. Es folgen in der Reihenfolge kleiner werdender Längen das Bariton-, Tenor-, Alt- und Sopran-Saxophon.

Auf diese harmonische Weise schließen wir das Kapitel der Mechanik und wenden uns der Wärmelehre zu.