

3.6 Elektrische Filter

1 Einführung

Ein elektrisches Filter ist eine Schaltung, die bestimmte Frequenzbereiche unverändert durchlässt, andere dagegen dämpft. Je nachdem welche Frequenzbereiche dies sind, spricht man von einem

Tiefpass, wenn Frequenzen unterhalb einer Eckfrequenz durchgelassen werden, einem

Hochpass, wenn Frequenzen oberhalb einer Eckfrequenz durchgelassen werden oder einem

Bandpass, wenn Frequenzen zwischen zwei Eckfrequenzen durchgelassen werden.

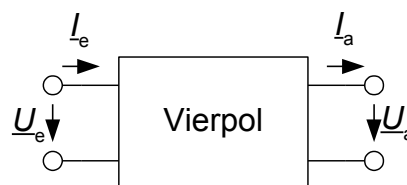


Abbildung 1: Schematische Darstellung eines Vierpols

Filter lassen sich durch Vierpolschaltungen aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen realisieren. Die mathematische Beschreibung der Übertragungseigenschaften erfolgt durch eine komplexe Vierpolmatrix. Im Leerlauf ($I_a = 0$) genügt zur Beschreibung das komplexe Spannungsübertragungsverhalten $A(j\omega)$:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = |\underline{A}(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (1)$$

Eine anschauliche grafische Darstellung der Frequenzabhängigkeit von \underline{A} kann entweder in Form der **Ortskurve** oder in Form des **Bode-Diagramms** erfolgen:

- Die **Ortskurve** erhält man durch Eintragen der Werte von \underline{A} für alle ω in die komplexe Ebene.
- Das **Bode-Diagramm** stellt in zwei Teildarstellungen die Abhängigkeiten der Amplitude (Betrages des Übertragungsverhaltens) $|\underline{A}|$ und der Phasenverschiebung φ zwischen U_e und U_a jeweils von der Frequenz ω dar. Betrags- und Frequenzachse haben dabei in der Regel logarithmische Maßstäbe.

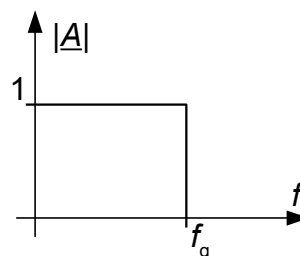


Abbildung 2: Amplitudenfrequenzgang eines idealen Tiefpasses

Bei Filtern ist besonders das Amplituden-Diagramm für einen schnellen Überblick über das Frequenzverhalten geeignet. Ein idealer Tiefpass sollte z.B. einen Amplitudenfrequenzgang wie in Abb. 2 haben, d.h. unterhalb der Eckfrequenz f_g wird die Eingangsspannung unverändert durchgelassen, oberhalb vollständig gesperrt. Mit praktisch realisierbaren Schaltungen kann dieser Verlauf allerdings nur angenähert erreicht werden.

In der Praxis finden Tiefpassfilter eine wichtige Anwendung bei der Analog-Digital-Wandlung. Um bei unbekanntem Signalen Aliasing-Effekte (siehe Vers. 3.7) zu vermeiden, schaltet man dem Analogeingang eines A/D-Wandlers ein geeignetes, möglichst steilflankiges (d.h. dem Ideal in Abb. 2 möglichst nahe kommendes) Tiefpassfilter vor. So erreicht man, dass bei der A/D-Wandlung Signalanteile mit Frequenzen oberhalb der halben Abtastfrequenz unterdrückt werden.

Im Versuch sollen verschiedene Filterschaltungen auf ihre Amplitudenfrequenzgänge untersucht werden. Diese werden mit dem gleichen Versuchsaufbau wie in Vers. 3.5 über ein LabView-Programm automatisch aufgezeichnet.

2 LabView-Programm

Da die Darstellung der Frequenz- und der Amplitudenachse logarithmisch erfolgen soll, sind einige kleine Änderungen an dem Programm aus Versuch 3.5 vorzunehmen. Die Erhöhung der Frequenz darf nicht mehr in festen Schritten (Inkrementen) erfolgen, sondern wird durch einen einstellbaren Multiplikator k vorgenommen:

$$f_i = k^i f_a. \quad (2)$$

f_a ist die Anfangsfrequenz. Die Anzahl n der erforderlichen Schritte bis zur Endfrequenz f_e berechnet sich zu

$$n = \frac{\lg(f_e/f_a)}{\lg k} + 1. \quad (3)$$

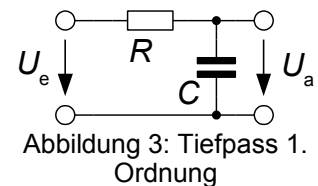
Für die erforderlichen Berechnungen werden im LabView-Programm Formelknoten eingesetzt.

Aufgabe:

- 2.1 Ändern Sie im LabView-Programm aus Versuch 3.5 die Maßstäbe der Anzeige auf *logarithmisch*.
- 2.2 Der auszumessende Frequenzbereich soll von 100 Hz bis 10 kHz gehen.
- 2.3 Die Frequenzänderung erfolgt mit einem Faktor von 1,05.

3 Tiefpass 1. Ordnung

Die einfachste Form eines Tiefpasses wird wie in Abb. 3 aus einem Kondensator und einem Widerstand aufgebaut. R und C bilden einen frequenzabhängigen Spannungsteiler. Das komplexe Übertragungsverhalten \underline{A} für diesen Tiefpass ist:



$$\underline{A}_T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (4)$$

Daraus ergeben sich für Betrag und Phase:

$$|\underline{A}_T(\omega)| = A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC). \quad (5)$$

Für die Grenz- oder Eckfrequenz $\omega_g = 1/RC$ wird $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$ und $\varphi = -45^\circ$ (siehe Abb. 4 und 5)

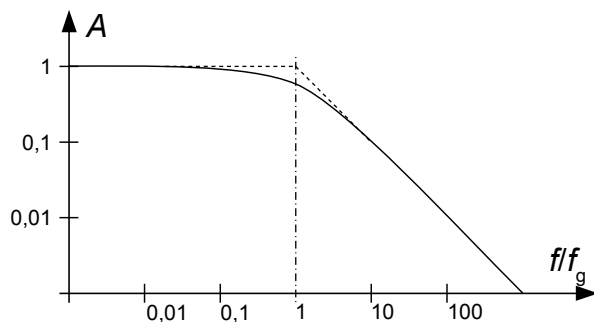


Abbildung 4: Amplitudenfrequenzgang beim Tiefpass 1. Ordnung

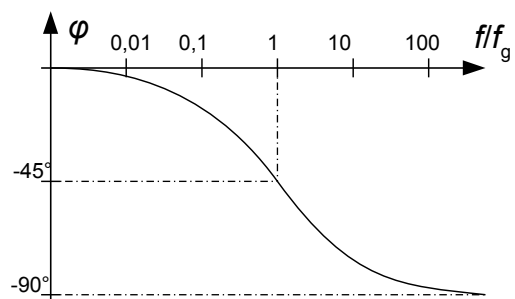


Abbildung 5: Phasenfrequenzgang beim Tiefpass 1. Ordnung

Da die Darstellung mit logarithmischen Maßstäben erfolgt, lässt sich schreiben:

$$\lg A(\omega) = -\frac{1}{2} \lg(1 + (\omega RC)^2) = -\frac{1}{2} \lg(1 + (\omega/\omega_g)^2). \quad (6)$$

Für kleine Frequenzen geht A also gegen 1, für große Frequenzen nähert es sich einer Asymptote mit der Steigung -1 an:

$$\lg A(\omega) \approx -\lg(\omega/\omega_g) \quad \text{für } \omega \rightarrow \infty \quad (7)$$

Aufgaben:

- 3.1 Ersetzen Sie in dem Versuchsaufbau aus 3.5 den Schwingkreis durch den Tiefpass nach Abb. 3 bestehend aus $R = 400 \Omega$ (Widerstandsdekade) und $C = 0,22 \mu\text{F}$. Die Ausgangsspannung des Generators wird mit Hilfe eines Multimeters auf 10 V, der Gleichrichter auf 1:10 und die Vorverstärkung am UniMess auf den Faktor 2 eingestellt.
- 3.2 Skizzieren Sie den Versuchsaufbau.
- 3.3 Berechnen Sie die Grenzfrequenz f_g des Tiefpasses.
- 3.4 Zeichnen Sie mit dem LabView-Programm den Frequenzgang auf.

4 Tiefpass 2. Ordnung

Um dem idealen Tiefpass aus Abb. 2 näher zu kommen, benötigt man eine Schaltung, die einen steileren Abfall der Amplitude bei hohen Frequenzen bewirkt. Eine Verbesserung stellt die Schaltung in Abb. 6 dar. Es handelt sich dabei um einen Tiefpass 2. Ordnung. Sein Übertragungsverhalten ist

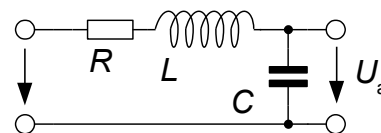


Abbildung 6: Tiefpass 2. Ordnung

$$\underline{A}(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \quad (8)$$

Mit der Ordnung eines Tiefpasses beschreibt man, in welcher Potenz die Frequenz im Nenner maximal vorkommt, bei 2. Ordnung also quadratisch. Der Amplitudenabfall ist bei hohen Frequenzen dann im logarithmischen Maßstab doppelt so steil wie bei einem Tiefpass 1. Ordnung. Je höherer Ordnung ein Tiefpass ist, um so näher kommt er also dem Ideal.

Die Schaltung Abb. 6 enthält im Prinzip einen Schwingkreis, der durch den Widerstand R mehr oder weniger stark gedämpft wird (siehe dazu auch Vers. 3.9). L und C bestimmen dabei die Eckfrequenz. Welchen Einfluss der Widerstand R auf die Eigenschaften des Filters hat soll im Versuch näher untersucht werden.

Durch folgende Substitution lässt sich (8) etwas übersichtlicher schreiben:

$$\omega_g = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad D = \frac{1}{Q} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (9)$$

Eck- und Resonanzfrequenz sind hier identisch. D ist ein Maß für die Dämpfung und entspricht dem Kehrwert der Güte Q (siehe auch Vers. 3.3. und 3.9). Aus (8) wird dann

$$\underline{A}(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + jD\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (10)$$

Für die Amplitude erhält man daraus

$$A(\omega) = |\underline{A}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + (D^2 - 2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1}}. \quad (11)$$

Der Einfluss der Dämpfung D lässt sich am mittleren Term des Nenners abschätzen. Ist $D < \sqrt{2}$ kann der Nenner bei bestimmten Frequenzen kleiner als 1, und A damit größer als 1 werden. Die Ausgangsspannung des Tiefpasses ist in diesem Fall also größer als die Eingangsspannung. Der Fall optimaler Dämpfung ist erreicht, wenn der mittlere Term verschwindet, d.h. $D = \sqrt{2}$ wird.

Aufgaben:

- 4.1 Erweitern Sie die Schaltung aus Aufgabe 3.1 durch eine Spule ($L = 35 \text{ mH}$) zu einem Tiefpass 2. Ordnung (siehe Abb. 6).
- 4.2 Berechnen Sie die Grenzfrequenz f_g und den Widerstand R_D für den Fall optimaler Dämpfung.
- 4.3 Nehmen Sie den Amplitudenfrequenzgang für verschiedene Werte von R (siehe Tab. 1) auf. Dabei ist zu beachten, dass die Spule bereits einen ohmschen Widerstand von $12 \text{ } \Omega$ mitbringt, der in Serie zum Dämpfungswiderstand R liegt. Die anderen Einstellungen sind wie in Aufgabe 3.1 zu wählen.
- 4.4 Vergleichen Sie die Steigung der Asymptote bei hohen Frequenzen für $R_D(\text{opt.})$ mit der Steigung beim Tiefpass 1. Ordnung

	$R+R_L$
a	$100 \text{ } \Omega$
b	$R_D(\text{opt.})$
c	$1000 \text{ } \Omega$

Tabelle 1:
Dämpfungs-
widerstände

Literatur:

- Meschede: Gerthsen Physik, Kap. 7.3
 Küpfmüller: Einführung in die theoretische Elektrotechnik, Kap. 36
 außerdem in den Praktikumsunterlagen:
 Einführung in die komplexe Berechnung von Netzwerken