3.13 Fourier-Synthese

1 Einführung

Im vorangegangenen Versuch 3.10 wurde untersucht, wie sich periodische Signale auf Basis des Satzes von Fourier in sinusförmige Anteile zerlegen lassen. In diesem Versuch soll nun der umgekehrte Weg beschritten werden. Einige einfache periodische Funktionen (Rechteck, Dreieck und Sägezahn) sollen schrittweise angenähert werden, indem der Grundwelle mit der Frequenz ω einzelne Oberwellen hinzugefügt werden. Für die Beispielfunktionen sind nachfolgend die Koeffizienten der Fourier-Reihen angegeben:

1.1 Rechteck-Funktion (Abb. 1 links)

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{Bmatrix} +x_0 & \text{für } 0 \le t < T/2 \\ -x_0 & \text{für } T/2 \le t < T \end{Bmatrix} \quad \text{mit } T = \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{4 \cdot x_0}{\pi} \cdot \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \ldots \right) \\ &= \frac{4 \cdot x_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \sin((2k-1)\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Dreieck-Funktion (Abb. 1 Mitte)

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{Bmatrix} 4 \cdot x_0 \cdot \frac{t}{T} & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{4} \\ 4 \cdot x_0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right) & \text{für } \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ 4 \cdot x_0 \cdot \left(\frac{t}{T} - 1 \right) & \text{für } \frac{3T}{4} \le t < T \end{Bmatrix} \quad \text{mit } T = \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{8 \cdot x_0}{\pi^2} \cdot \left(\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - \frac{1}{7^2} \cdot \sin(7\omega t) + \ldots \right) \\ &= \frac{8 \cdot x_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \cdot \sin((2k-1)\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \end{aligned} \tag{2}$$

1.3 Sägezahn (Abb. 1 rechts)

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cdot x_0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right) \quad \text{für } 0 \le t < T \quad \text{mit } T = \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2 \cdot x_0}{\pi} \cdot \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{4}\sin(4\omega t) + \ldots \right) \\ &= \frac{2 \cdot x_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \end{aligned} \tag{3}$$

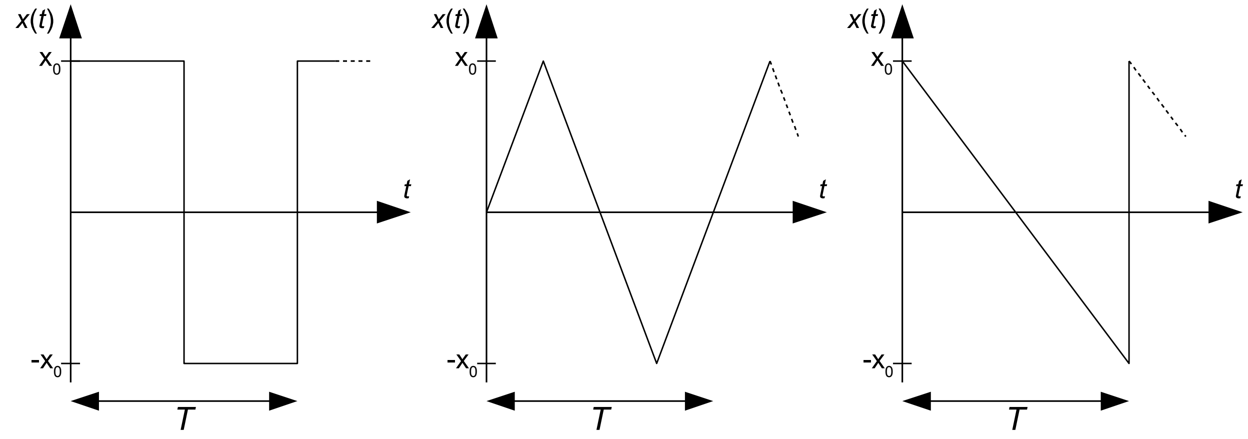

Abb. 1: Rechteckfunktion, Dreieckfunktion und Sägezahnfunktion

2 Versuchsdurchführung

Für diesen Versuch gibt es ein fertiges Programm *F-Synth.vi* im Unterverzeichnis *Fourier*. Das Programm erzeugt die erforderlichen Sinussignale, multipliziert sie mit einstellbaren Koefffizienten und stellt die Summe als Diagramm dar. Für die oben genannten Beispielfunktionen sind alle Koeffizienten $a_n = 0$. Die Koeffizienten b_n ergeben sich aus den Formeln (1) bis (3).

Vor der Durchführung der einzelnen Aufgaben sollten zunächst b_1 auf 1 und alle anderen Koeffizienten b_n auf 0 gesetzt werden. Anschließend wird das LabView-Programm im kontinuierlichen Modus gestartet. Die einzelnen Koeffizienten können jetzt eingegeben werden, wobei gleichzeitig die Auswirkung auf das zusammengesetzte Signal sichtbar wird.

Aufgaben:

2.1 Berechnen Sie die Koeffizienten der oben genannten Beispielfunktionen nach den Formeln (1) bis (3) für $n = 1$,..., 9, und stellen Sie sie in Form einer Tabelle dar. Für die Berechnung können Sie das auf allen Praktikums-PCs vorhandene Tabellenkalkulationsprogramm *OpenOffice Calc* verwenden.

2.2 Stellen Sie nacheinander die einzelnen Koeffizienten für die Rechteckfunktion im LabView-Programm ein, und betrachten Sie das sich ergebende Signal. Was fällt Ihnen dabei auf?

2.3 Wiederholen Sie dieses Verfahren für die Dreieckfunktion. Warum ist die Annäherung an die Sollfunktion hier wesentlich besser als beim Rechteck?

2.4 Geben Sie die Koeffizienten für den Sägezahn ein, und beschreiben Sie das Ergebnis. Was passiert, wenn Sie den Koeffizienten a_0 verändern?

Hinweis: Das Endergebnis ist jeweils auszudrucken und dem Protokoll beizulegen.

5.2011/Ra