

## 1.3 Reversionspendel

### 1 Einführung

Die harmonische Drehbewegung ist eine in der Technik und in der Natur häufig vorkommende Art der Bewegung. Zu ihrer mathematischen Formulierung gelangt man durch Gleichsetzen des sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung ergebenden Drehmoments mit einem - beispielsweise durch eine Spiralfeder realisierten - rücktreibenden Richtmoment. Die hieraus resultierende Differentialgleichung besitzt dann für kleine Winkel  $\varphi$  eine Lösung der Form

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t), \quad (1)$$

die die Bewegung einer harmonischen Drehbewegung beschreibt.

Eine sehr einfache Möglichkeit zur Realisierung eines rücktreibenden Momentes besteht in der Ausnutzung der Schwerkraft. So stellen alle an einem Punkt oberhalb des Schwerpunktes im Schwerfeld der Erde drehbar aufgehängten Körper ein Pendel dar, das bei entsprechendem Anstoß eine harmonische Drehbewegung ausführt.

Eine idealisierte Form eines solchen Pendels ist das mathematische oder Fadenpendel. Es besteht aus einer punktförmig angenommenen Masse  $m$ , die an einem masselosen Faden der Länge  $l$  aufgehängt ist (siehe Abb. 1). Hierfür ergibt der Ansatz über die Drehmomente die Differentialgleichung:

$$m l^2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -m \cdot l \cdot g \cdot \sin \varphi, \quad (2)$$

in der sich unter der Annahme kleiner Drehwinkel  $\sin \varphi \approx \varphi$  setzen lässt. Das führt dann zu der in (1) dargestellten harmonischen Drehbewegung. Dabei gilt:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad \text{bzw.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3)$$

Mit Hilfe von (3) lässt sich somit aus der Schwingungsdauer  $T$  des Pendels relativ einfach die Erdbeschleunigung  $g$  bestimmen. In der Praxis erweist es sich jedoch als schwierig, die Fadenlänge  $l$  genau zu ermitteln.

Eine genauere Bestimmung der Erdbeschleunigung kann mit einer besonderen Ausführung eines physikalischen Pendels, dem so genannten Reversionspendel, durchgeführt werden. Für ein physikalisches Pendel in Form eines im Punkt A aufgehängten homogenen Stabes (siehe Abb. 2) ergibt sich unter den gleichen Annahmen wie oben für die Schwingungsdauer  $T$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot a}}. \quad (4)$$

Hierin ist  $a$  der Abstand zwischen A und dem Schwerpunkt S und  $J$  das Trägheitsmoment des Stabes. Das Trägheitsmoment  $J$  für eine Drehung um den Punkt A berechnet sich nach dem Steinerschen Satz zu

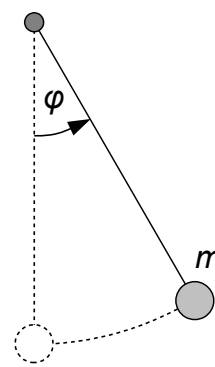


Abbildung 1:  
Mathematisches  
Pendel

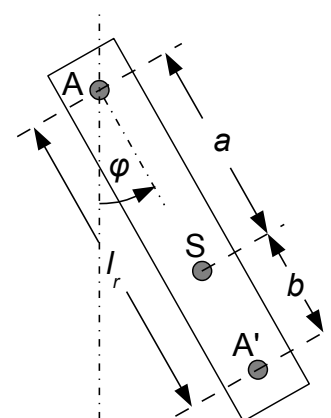


Abbildung 2: Physikalisches  
Pendel

$$J = J_S + m \cdot a^2, \quad (5)$$

wobei  $J_S$  das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment darstellt. Somit erhält man für die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_S + m \cdot a^2}{m \cdot g \cdot a}}. \quad (6)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (3), so ist ersichtlich, dass bezüglich der Schwingungsdauer das physikalische Pendel einem mathematischen Pendel mit der Fadenlänge

$$l_r = \frac{J_S + m \cdot a^2}{m \cdot a} \quad (7)$$

entspricht. Daher wird diese Länge  $l_r$  auch reduzierte Pendellänge genannt. Der Punkt  $A'$ , der auf der Verlängerung von  $AS$  im Abstand  $l_r$  von  $A$  - bzw.  $b$  von  $S$  - liegt, heißt Schwingungsmittelpunkt. Lässt man den Stab um den Punkt  $A'$  schwingen, so erhält man für die Periodendauer entsprechend Gl.(6):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_S + m \cdot b^2}{m \cdot g \cdot b}}. \quad (8)$$

Unter Benutzung der Definition für die reduzierte Pendellänge lässt sich nun zeigen, dass das Pendel um beide Aufhängepunkte gleichschnell schwingt, und man erhält mit  $a + b = l_r$ :

$$T_{S_1} = T_{S_2} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}. \quad (9)$$

Diese Eigenschaft nutzt man bei dem Reversionspendel aus. Hier sind die Aufhängepunkte  $A$  und  $A'$  als scharfe Schneiden  $S_1$  und  $S_2$  ausgebildet, deren Abstand  $l_r$  sich sehr genau messen lässt (Abb. 3). Auf der Pendelstange sind zwei verschiebbare Massen angebracht. Durch Variation der Abstände dieser Massen lässt sich nun eine Einstellung finden, bei der die Schwingungsdauern um beide Schneiden  $S_1$  und  $S_2$  genau gleich sind, so dass man dann durch Messung der Schwingungsdauer nach (9) die Erdbeschleunigung sehr genau bestimmen kann.

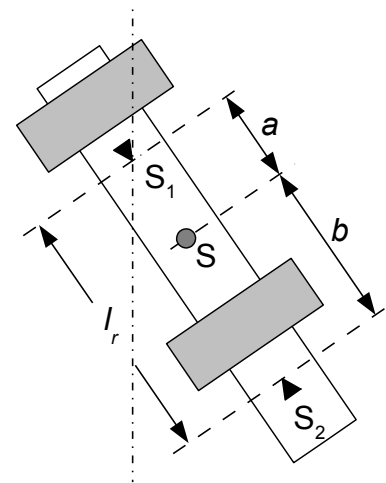


Abbildung 3: Reversionspendel

## 2 Versuchsdurchführung

Zur Messung der Schwingungsdauer steht eine durch eine Lichtschranke gesteuerte sehr genaue digitale Stoppuhr zur Verfügung. Die Präzision der Anordnung ist so hoch, dass man eine Veränderung der Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude feststellen kann. Führen Sie deshalb den Versuch mit stets gleicher Anfangsauslenkung des Pendels durch.

### Aufgaben:

- 2.1 Bestimmen Sie die Schwingungsdauern  $T_{S_i}$  ( $i = 1, 2$ ) um die Schneiden  $S_i$  in Abhängigkeit der Abstände  $r_i$  zwischen den Schneiden  $S_i$  und der 1000g-Masse.  $r_i$  wird dabei in Schritten von 10 cm verändert. Der Abstand  $p$  zwischen Pendelende und 1400g-Masse wird dabei zu  $p = 15$  cm gewählt (siehe auch Abb. 4).
- 2.2 In einer grafischen Darstellung wird  $T_{S_i}$  gegen  $r_i$  aufgetragen. Dabei schneiden sich die zwei zueinander gehörenden parabelartigen Kurven in zwei Punkten ( $T_{S_1} = T_{S_2}$ ).

- 2.3 Zur genaueren Bestimmung der zu den Schnittpunkten gehörenden Schwingungsdauer ist die Umgebung eines der beiden Schnittpunkte noch einmal auszumessen, wobei  $r_1$  in Schritten von 1 cm variiert wird. In einer grafischen Darstellung mit vergrößertem Maßstab ist unter der Annahme eines näherungsweise linearen Verlaufes der Kurven in der Umgebung des Schnittpunkts dieser genau zu bestimmen.
- 2.4 Berechnen Sie aus der sich so ergebenden Schwingungsdauer  $T$  die Erdbeschleunigung  $g$ .
- 2.5 Führen Sie eine Fehlerrechnung durch. Benutzen Sie dabei für die Definition der Zeitunsicherheit  $\Delta t$  ein statistisches Verfahren. Überlegen Sie, inwieweit die Unsicherheit in der Bestimmung des Abstandes  $r_i$  in die Fehlerbetrachtung mit eingeht! Bestimmen Sie grafisch aus den Unsicherheiten für die Schwingungsdauern  $T(r_i)$  die resultierende Unsicherheit der Schwingungsdauer  $T$  im Schnittpunkt. Hieraus ergibt sich dann der Fehler für den Wert  $g$  der Erdbeschleunigung. Könnte man die Ortsunsicherheit  $\Delta r_i$  durch geschicktes Vorgehen noch weiter verringern?

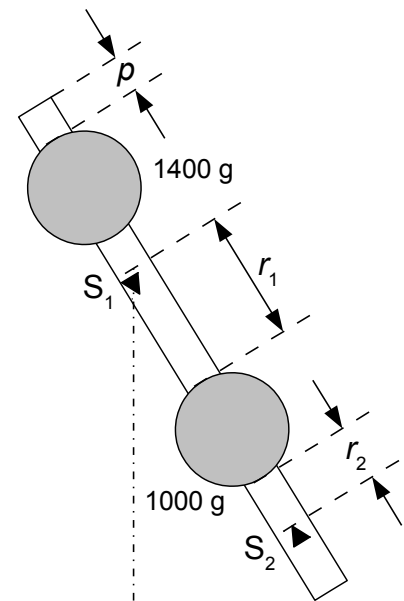


Abbildung 4: Aufbau des Reversionspendels im Versuch

### Literatur:

Bergmann, Schaefer:	Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd.I, Kap. 36
Meschede:	Gerthsen Physik, Kap. 2.3
Krötzsch:	Physikalisches Praktikum, Kap. 3
Walcher:	Praktikum der Physik, Kap. 2.7

### Geräte:

Fertig montiertes Reversionspendel mit  $l_r = (1,0000 \pm 0,0001)$  m, digitale Stoppuhr mit Lichtschranke