1.2 Trägheitsmoment

1 Einführung

Bei der Entwicklung der Mechanik lassen sich bei den Bewegungsgleichungen und Erhaltungssätzen für Translations- und Rotationsbewegungen völlig analoge Gesetzmäßigkeiten herleiten. Hierbei stößt man jedoch auf eine Besonderheit der Rotationsbewegung, an der ein grundsätzlicher Unterschied gegenüber der Translationsbewegung offenbar wird.

Die kinetische Energie eines Massenpunktes beträgt $W_{\mathrm{kin}} = ½ \cdot m \cdot v^2$. Geht man nun zu einem starren Körper aus n Massenpunkten über, so sind bei einer Translationsbewegung die Geschwindigkeiten aller Massenpunkte gleich: $v_{\mathrm{i}} = v$. Daher erhält man für seine kinetische Energie die Beziehung

$$W_{kin,\, trans} \;=\; \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \;=\; \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 . \tag{1}$$

Bei der Rotationsbewegung hingegen haben die Massenpunkte m_{i} bei gleicher Winkelgeschwindigkeit wegen

$$v \;=\; \omega \cdot r \tag{2}$$

in verschiedenen Abständen r_{i} jeweils verschiedene Bahngeschwindigkeiten v_{i}. Daraus ergibt sich dann bei der Rotationsbewegung des starren Körpers für die kinetische Energie die Beziehung

$$W_{kin,rot} \;=\; \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot v_i^2 \;=\; \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 . \tag{3}$$

Den Ausdruck

$$I \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 \tag{4}$$

nennt man das Trägheitsmoment des starren Körpers. Hat er eine kontinuierliche Massenverteilung muss die Summation durch das Integral ersetzt werden:

$$I \;=\; \int_0^m r^2 \,\mathrm{d}m . \tag{5}$$

Damit erhält man aus (3) für die Rotationsbewegung eine der Formel (1) ähnliche Beziehung

$$W_{kin,rot} \;=\; \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 . \tag{6}$$

Bei einem starren Körper tritt das Trägheitsmoment in allen Formeln der Rotationsbewegung an die Stelle der Masse bei den entsprechenden Gleichungen für die Translation. Es ist ein Maß für das Beharrungsvermögen eines Körpers bei Rotation und deswegen von besonderer Bedeutung für die Auslegung von Maschinen bzw. den in ihnen verwendeten rotierenden Teilen .

2 Bestimmung des Trägheitsmoments

Die Bestimmung von Trägheitsmomenten ist nicht unproblematisch. In Fällen mit regelmäßiger Geometrie kann man das Trägheitsmoment eines Körpers nach Gl. (5) berechnen. In anderen Fällen sind auch grafische Lösungen möglich.

Bei unregelmäßig geformten Körpern ist man dagegen auf eine experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes angewiesen, die sich beispielsweise mit Hilfe der harmonischen Drehschwingung durchführen lässt. Hierzu benutzt man einen Drehtisch, der sich mit Hilfe einer Spiralfeder zur Erzeugung eines rücktreibenden Momentes D in harmonische Drehschwingungen mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}} \tag{7}$$

versetzen lässt. Hierbei ist I das Trägheitsmoment des Drehtisches um die Drehachse. Bei Aufsetzen eines Probekörpers addieren sich einfach die Trägheitsmomente. Wenn der Körper nicht zentral, sondern im Abstand r von der Drehachse angebracht wird, dann gilt nach dem Steinerschen Satz

$$I_r = I_s + m \cdot r^2. \tag{8}$$

Dabei ist I_r das Trägheitsmoment um eine Achse, die von der Schwerpunktachse des Probekörpers den Abstand r aufweist. I_s ist das Trägheitsmoment um die Schwerpunktachse und m die Masse des Körpers.

Mit Hilfe einer solchen Drehtischanordnung, bei der die Möglichkeit des Aufsetzens von Probekörpern in verschiedenen Abständen r von der Drehachse gegeben ist, sollen nun die Trägheitsmomente einiger Körper bestimmt werden.

Aufgaben:

2.1 Prüfen Prüfen Sie zunächst die waagerechte Lage des Drehtisches.

2.2 Unter Berücksichtigung der praktischen Gegebenheiten ist der Auslenkwinkel des Drehtisches zu optimieren. Begründen Sie die Wahl Ihrer Auslenkung.

2.3 Berechnen Sie das Trägheitsmoment des zylindrischen Körpers, der für die Kalibrierung des Drehtisches verwendet werden soll.

2.4 Legen Sie den zylindrischen Körper in verschiedenen Abständen r von der Drehachse auf die Platte des Drehtisches, und messen Sie die dazugehörigen Schwingungsdauern T.

2.5 Ermitteln Sie durch Anwendung des Steinerschen Satzes das Gesamtträgheitsmoment, und leiten Sie eine Beziehung zwischen T^2 und r^2 her.

2.6 Stellen Sie den linearen Zusammenhang zwischen T^2 und r^2 grafisch dar, und bestimmen Sie aus der Zeichnung Trägheitsmoment I_T und Richtmoment D_T des Drehtisches.

2.7 Warum ist es wichtig, Trägheits- und Richtmoment des Drehtisches genau zu kennen?

Literatur

Bergmann, Schaefer:	Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1
Meschede:	Gehrtsen Physik, Kap. 2
Tipler:	Physik, Teil 1, Kap. 9

Geräte

1 Drehtisch, 1 Lichtschranke mit Stoppuhr

Probekörper

Auflegbarer, zylindrischer Körper mit

Masse	$m = (0{,}4073 \pm 0{,}0002)$ kg
Durchmesser	$d = 47{,}2$ mm
Höhe	$h = 28{,}0$ mm