

② Mikroskopisch: BCS-Theorie

(Skizze!)

Einige Resultate vorab

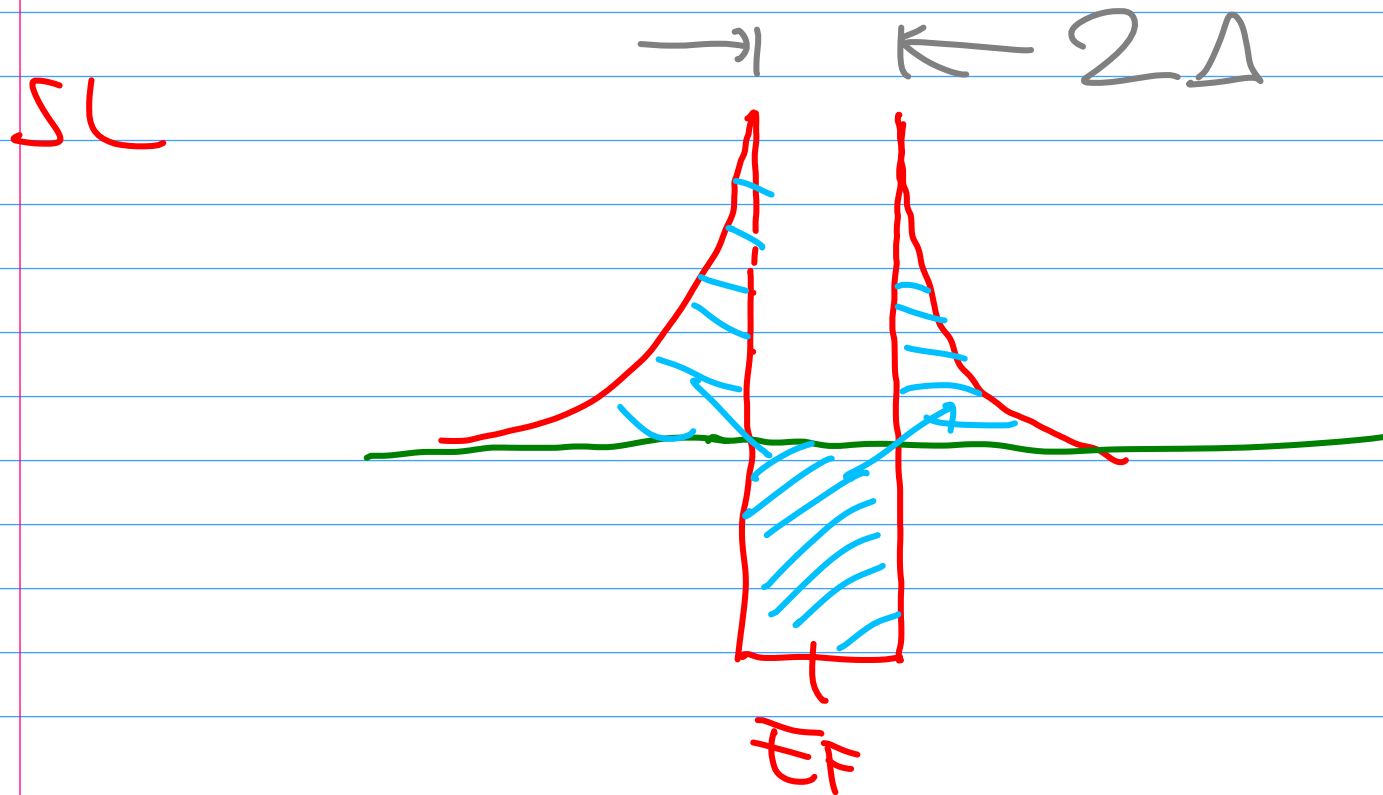
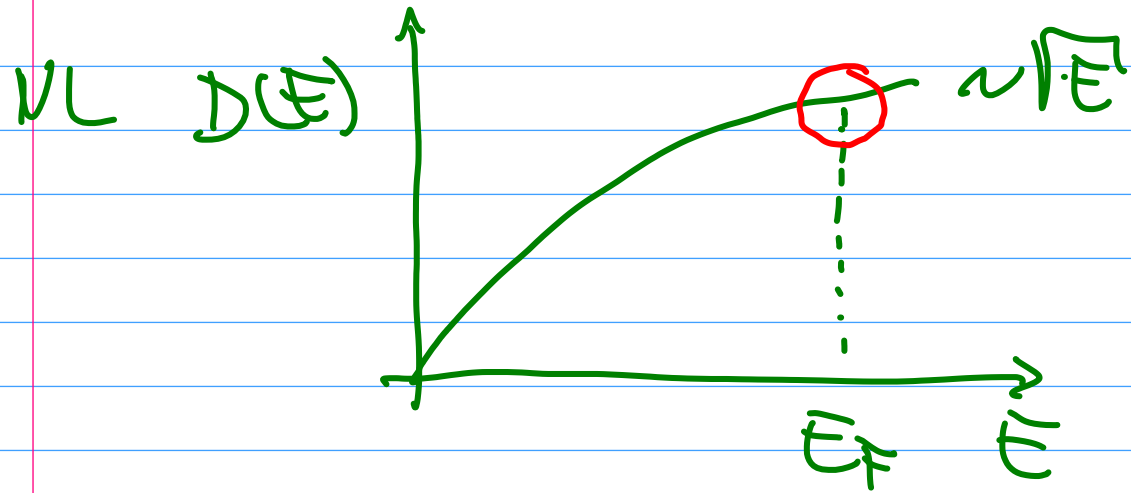
BCS-Grundzustand besteht aus Cooperpaaren
mit Ladung $2e$, Masse $2m$ und $(k\uparrow, -k\downarrow)$
mittlerer Abstand der e^- , Kohärenzlänge $\approx 10^3 \text{ \AA}$
senkt Energie ab

$$T_c = 1,14 \Theta_D \exp\left(-\frac{1}{u D(E_F)}\right) \approx T_c \sim \Theta_D \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Lücke der Breite 2Δ um E_F

$$\Delta(T) = 1,74 \Delta(T=0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \quad \Delta(0) = 1,76 k_B T_c$$

Skizzen VL, SL



Anteil der $SL-c$ ist gering

$$n_S \approx \Delta (D(E_F))$$

$$n_N = \frac{2}{3} E_F \cdot D(E_F)$$

$$\Rightarrow \frac{n_S}{n_N} \approx \frac{\Delta}{E_F} \approx 10^{-4}$$

→ spez. Wärme.

Der erste angeregte Zustand liegt 2Δ über dem B.Z.

BCS \Rightarrow London Gleichungen

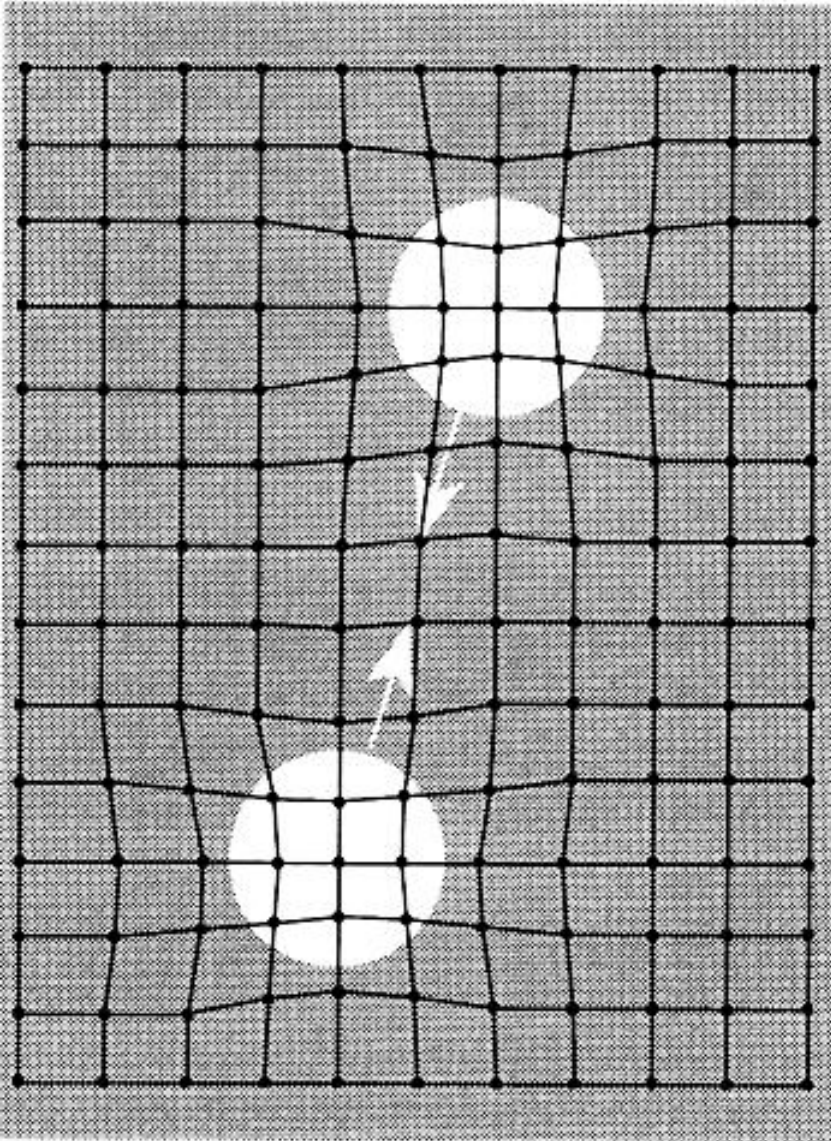
kritische Feldstärke

thermodyn. Größen (C_V, \dots)

BCS Theory



John Bardeen, Leon Cooper,
John Schrieffer, Nobel Prize in
Physics 1972



Attractive electron-electron interaction

Phonon-mediated

leads to bound state (Cooper 1956)

Cooper pairs

$$\text{at } j=0: \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0 \quad \& \quad \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 = 0$$

Symmetry: s

beliebig kleine Attraktion der e^- macht
Grundzustand des Fermigesetz instabil

m.A.w: $2e^-$ in WW besetzen Zustände unter E_F

Was kann die Attraktion hervorrufen?

Isotopeneffekt \rightarrow Phononen

e_2 wird vom "Kielwasser" des e_1 angezogen

Vorbeiflug eines $e^- \hat{=} \text{Kraftsto\ss}$ auf Sitter

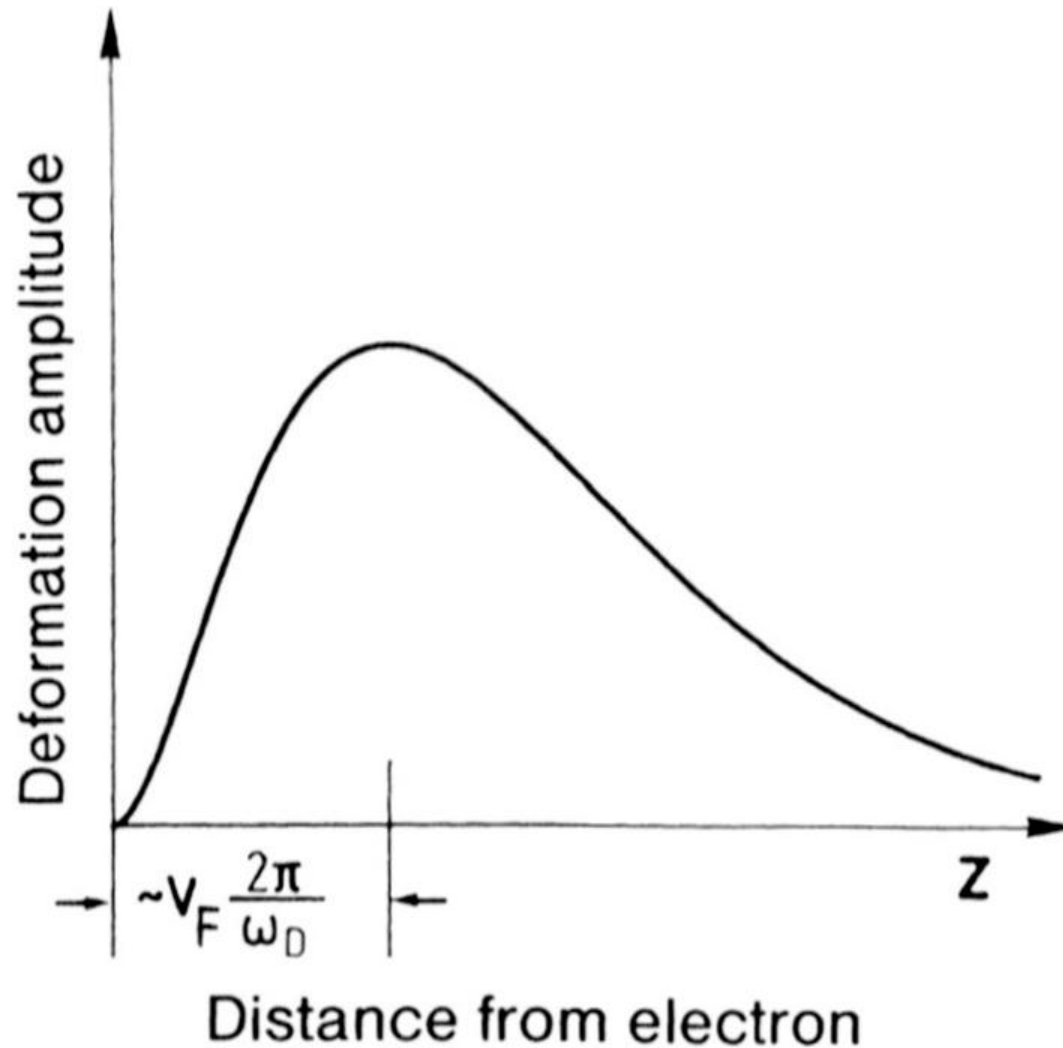
Maximaler Effekt $\frac{1}{4} T$ später

$$v_F \approx 3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad f_{\text{vib}} \approx 10^{15} \text{ Hz}$$

$\Rightarrow e^-$ ist dann bereits $\approx 100 \text{ nm}$ weiter

theoret. Beschreibung: e^- mit \vec{k}_1, \vec{k}_2 tauschen
virtuelle Phononen mit \vec{q} aus

Fast electron - slow lattice



n.b.: das statische Bild zuvor ("Gummimatte") ist etwas irreführend.

Superconductivity : A scattering event

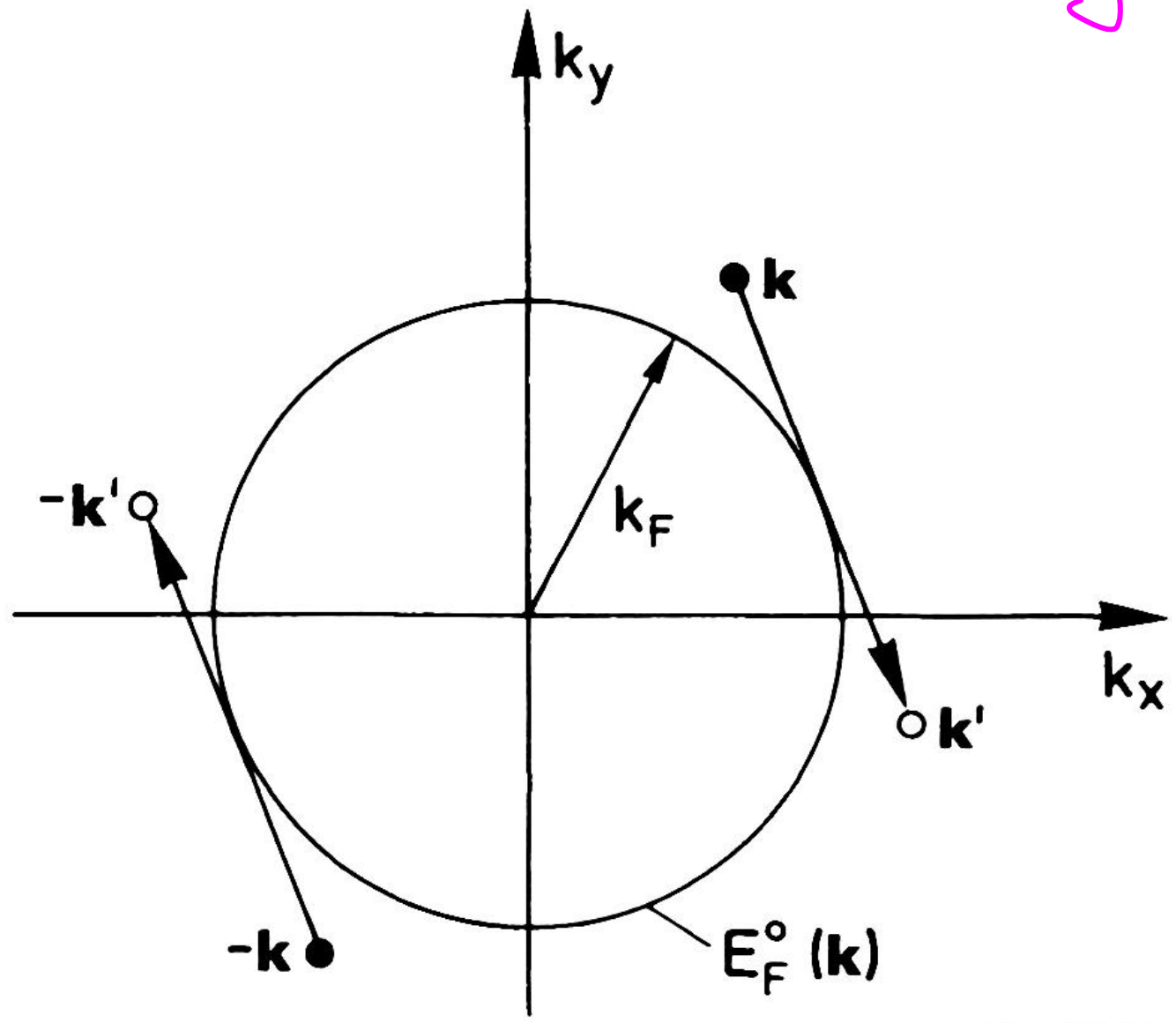


Fig. 10.10. Representation in k space of the scattering of an electron pair with wave vectors $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ to the state $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$

Phononenaustausch:

$$\vec{k}'_1 = \vec{k}_1 + \vec{q} \quad \vec{k}'_2 = \vec{k}_2 - \vec{q}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}'_1 + \vec{k}'_2$$

Sei $T=0$ \rightarrow Streuung in dünne Schale des
Fermikörpers von $E_F \dots E_F + \hbar\omega_p$

Dicke der Schale: $\delta k = \frac{\omega_D m}{\hbar k_F}$

(denn $\delta k \cdot \frac{dE}{dk} = \delta E = \hbar \omega_D \Rightarrow \delta k \frac{\hbar^2}{m} k_F = \hbar \omega_D$)

δk ist "hauchdünn"

\Rightarrow nur wenige Streuevents sind
mit \vec{k} -Erhaltung vereinbar

Skizze, gar nicht maßstäblich...

Superconductivity

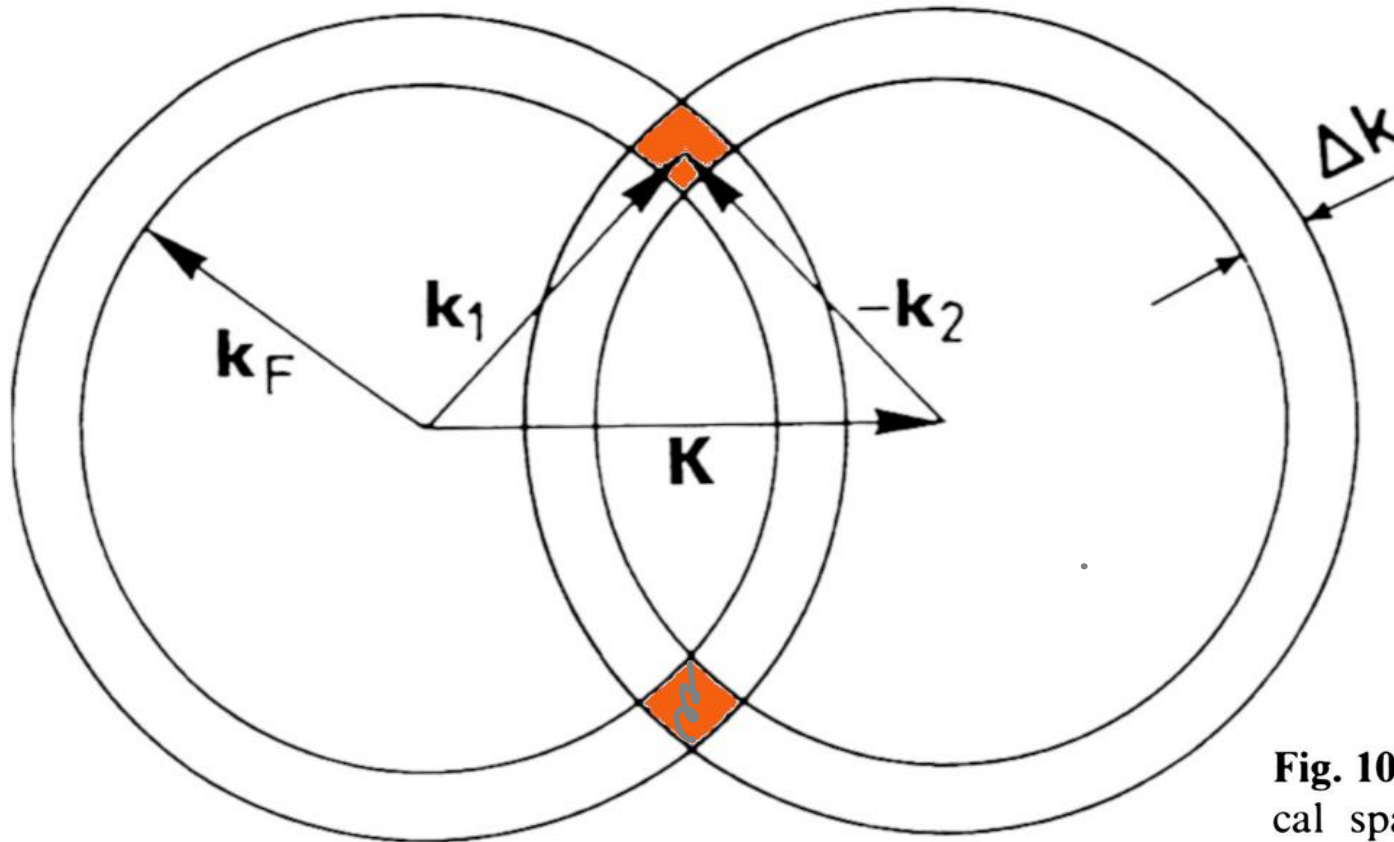


Fig. 10.8. Representation (in reciprocal space) of electron pair collisions for which $k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2 = K$ remains constant. Two spherical shells with Fermi radius k_F and thickness Δk describe the pairs of wave vectors k_1 and k_2 . All pairs for which $k_1 + k_2 = K$ end in the shaded volume (rotationally symmetric about K). The number of pairs k_1, k_2 is proportional to this volume in k space and is maximum for $K = 0$

⇒ Probability maximum
for $\vec{K} = \vec{0}$

⇒ Cooper-paar besteht aus $2e^-$

$$\text{mit } \vec{k}_1 = -\vec{k}_2$$

$$(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \text{CP}$$

$$\text{Produktansatz: } \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A e^{i\vec{k}_1 \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \vec{r}_2}$$

Schwerpunkt ruht ($j=0$)

⇒ Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ verwenden

$$\Rightarrow \Psi(\vec{r}) = A e^{i\vec{k} \vec{r}}$$

$$(\text{dabei } \vec{k} = \vec{k}_1 = -\vec{k}_2)$$

Es wird hart...

Zum Trost gelegentlich ein



WW per Gitter streut \bar{e} ständig in andere \vec{k}

$$\Rightarrow \text{Überlagerung } \Psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$|A_{\vec{k}}|^2 =$ Wahrsch., Paar im Zustand $(\vec{k}, -\vec{k})$ zu finden

$$\text{Da } k_F < k < \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E_F + \hbar\omega)}$$

ist $A_{\vec{k}} = 0$ außerhalb dieses Intervalls

Damit in die Schrödingergl. ...

$$E\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \tilde{V}(\vec{r}) \right] \psi$$

\tilde{V} hat 2 Komponenten:

- abgeschirmte Coulomb WW
- Anziehung durch Phononen

genaue Form irrelevant



$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad \text{in SG,} \quad \times e^{-i\vec{k}'\vec{r}} \int d^3r.$$

Wie bei Rtgestreuung

$$\int d^3r \exp[i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}] = 0, \quad \text{außer wenn } \vec{k} = \vec{k}';$$

$\int \psi \psi^* d^3v = L^3$ (Probenvolumen), dadurch Gl. teilen..

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} A_{\vec{k}} + \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_1} \int \tilde{v}(v) \exp[i(\vec{k} - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}] d^3v = E A_{\vec{k}}$$

2 fehlt, weil
 $\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{m}$

$V_{\vec{k}\vec{k}_1} \approx \text{const.} = -\tilde{V}_0 < 0$ (wg. Hfr.)

$$\rightarrow \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E \right) A_{\vec{k}} = \frac{\tilde{V}_0}{L^3} \sum_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_1}$$

$$\Rightarrow A_{\vec{k}} = \frac{\tilde{V}_0}{L^3} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E} \sum_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_1}$$



ψ ist Mischung aller \vec{k} , aber überwiegend k_F , weil Nenner dort $\rightarrow 0$

Gl. über \vec{k} summieren, $\sum_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} 1$, dividieren ...

$$1 = \frac{\tilde{V}_0}{L^3} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E}$$

$\sum_{\vec{k}}$ durch $\int dE$ (DOS) ersetzen

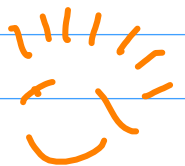
$$z := \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (= E_{\text{kin}})$$

$$\Rightarrow 1 = \tilde{V}_0 \frac{D(E_F)}{E_F} \int_{E_F}^{E_F + \hbar \omega_D} dz \frac{1}{2z - E}$$

$1 \text{CP} \approx 2z$ 2

$$\Rightarrow 1 = \tilde{V}_0 \frac{1}{2} D(E_F) \frac{1}{2} \ln(E - 2z)$$

$E_F + \hbar \omega_D$
 E_F



$\Rightarrow E = \dots$

$$\Rightarrow \Delta E := E - 2E_F$$

$$= 2\hbar\omega_D \left(1 - \exp\left(\frac{\gamma}{\tilde{V}_0 D(E_F)}\right) \right)^{-1}$$

$$\approx -2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{\gamma}{\tilde{V}_0 D(E_F)}\right) \quad \text{für } \tilde{V}_0 D \ll 1$$

$\Rightarrow \Delta E < 0 \hat{=} \text{Energieabsenkung}$



$$\Delta E \approx -2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{4}{V_0 D(E_F)}\right)$$

⇒ ① Gute Leiter (bei RT) haben schwache e-Phonon-WW ⇒ werden nicht SL

② $D(E_F)$ vergrößert Absenkung

③ ω_D maximieren → leichte Atome

"Bauanleitung" für SL