

# Einfachste Lsg. des Heisenbergmodells

Paramagnetismus wechselwirkender Momente

Betrachte Spin  $i$  unter Einfluss der NN

$$\mathcal{H}_i = -2J \vec{S}_i \sum_{j \in \text{NN}} \vec{S}_j \quad z = \# \text{ in NN}$$

$$\vec{\mu}_i = -g \mu_B \vec{S}_i$$

$$\rightarrow \mathcal{H}_i = -2J \frac{1}{g^2 \mu_B^2} \vec{\mu}_i \sum_{j=1}^z \vec{\mu}_j =: -\vec{\mu}_i \vec{B}_M$$

Weissches Molekularfeld

$\vec{\mu}_i$  sind zeitabh.  $\rightarrow$  mitteln!

$$\langle \vec{b}_M \rangle = \frac{2J}{g^2 \mu_0} z \langle \vec{\mu} \rangle ; \quad \vec{\Pi} = \frac{N}{V} \langle \vec{\mu} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{b}_M \rangle = \frac{2J}{g^2 \mu_0} \frac{z}{\mu_0} \frac{V}{N} \vec{\Pi} \mu_0 = \lambda \vec{\Pi} \mu_0$$

nun äußeres Feld  $\vec{B}_a$

$$\mu_0 \vec{\Pi} = \chi_0 (\vec{B}_a + \vec{b}_M) ; \quad \chi_0 \text{ atomare Suszept.}$$

$$\text{für kleine } \vec{B} : \vec{\Pi} \sim \vec{B}, \quad \chi_0 = \frac{C}{T}$$

$$\mu_0 \vec{\Pi} = \frac{C}{T} (\vec{B}_a + \lambda \mu_0 \vec{\Pi})$$

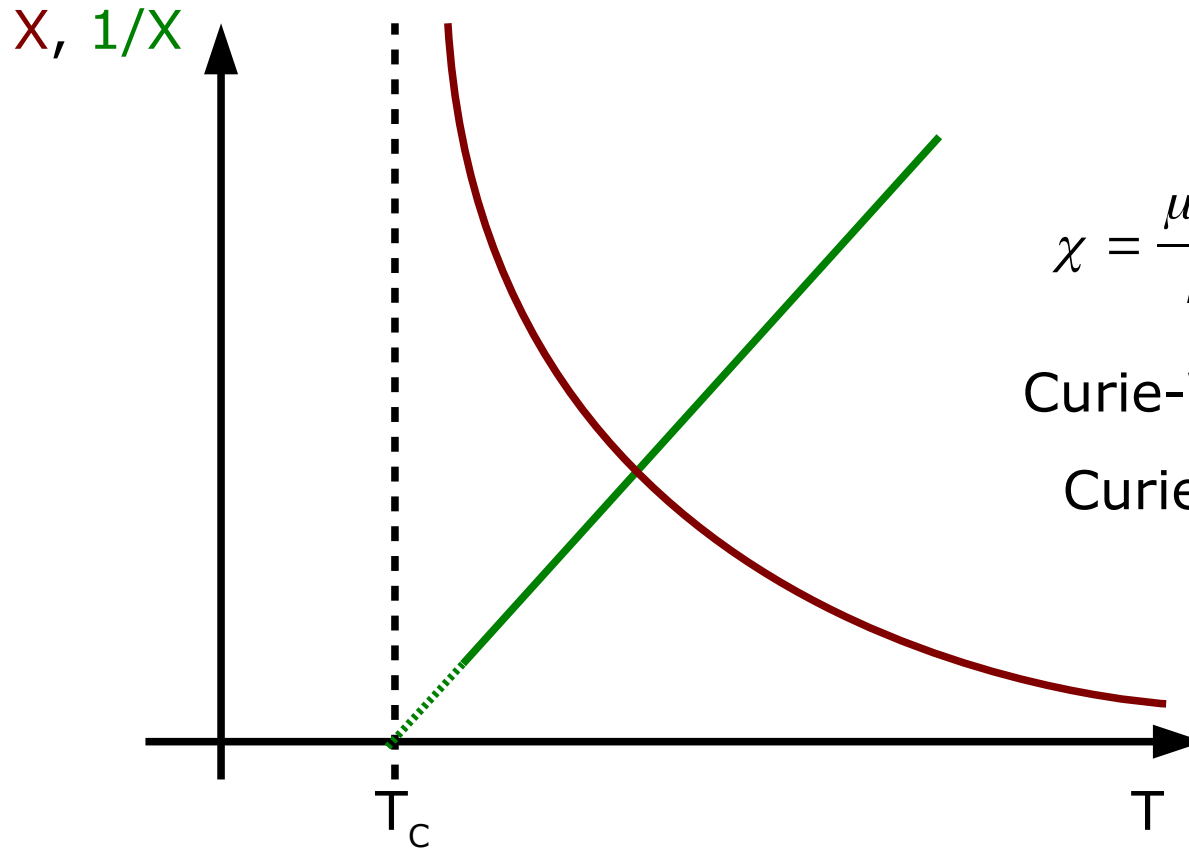
$$\Rightarrow \mu_0 M (T - \lambda C) = C B_a$$

$T_c = \text{para. Curie temp.}$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\mu_0 M}{B_a} = \frac{C}{T - \lambda C} = \frac{C}{T - T_c}$$

Curie-Weiss-Gesetz

# Paramagnetismus **wechselwirkender** Atome



$$\chi = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{\mathbf{B}_a} = \frac{C}{T - T_C}$$

Curie-Weiss-Gesetz

Curietemperatur

$$\lambda = \frac{2zJ}{g^2 \mu_B^2 N}$$

$$C = \frac{N g^2 \mu_B^2 j(j+1)}{3k_B}$$

$$\rightarrow T_C = \frac{2zJ j(j+1)}{3k_B}$$

Genauere Lösung des H'bergmodells:  $\chi \propto \frac{1}{(T - T_C)^{4/3}}$

Einige wichtige Ferromagnete:

Curietemperaturen  $T_c$ ,  $k_B T_c$ , Austauschfeld  $B_M$

	$T_c$ [K]	$k_B T_c$ [meV]	$B_M$ [T]
Fe	1043	89.9	1552
Co	1393	120	2074
Ni	631	54.4	939
Gd	290	25.0	432

# Ferromagnetismus lokalisierter Momente

$$J = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Brillouinfkt. } B_{\frac{1}{2}}(x) = \tanh(x)$$

$$\vec{M} = \frac{N}{V} \vec{\mu} \tanh\left(\frac{\vec{\mu} \cdot \vec{B}_m}{k_B T}\right) \quad ; \quad \mu = \frac{1}{2} g \mu_B \approx \mu_B$$

Zunächst  $B_a = 0$

$$\vec{B}_m = \lambda \mu_0 \vec{M}$$

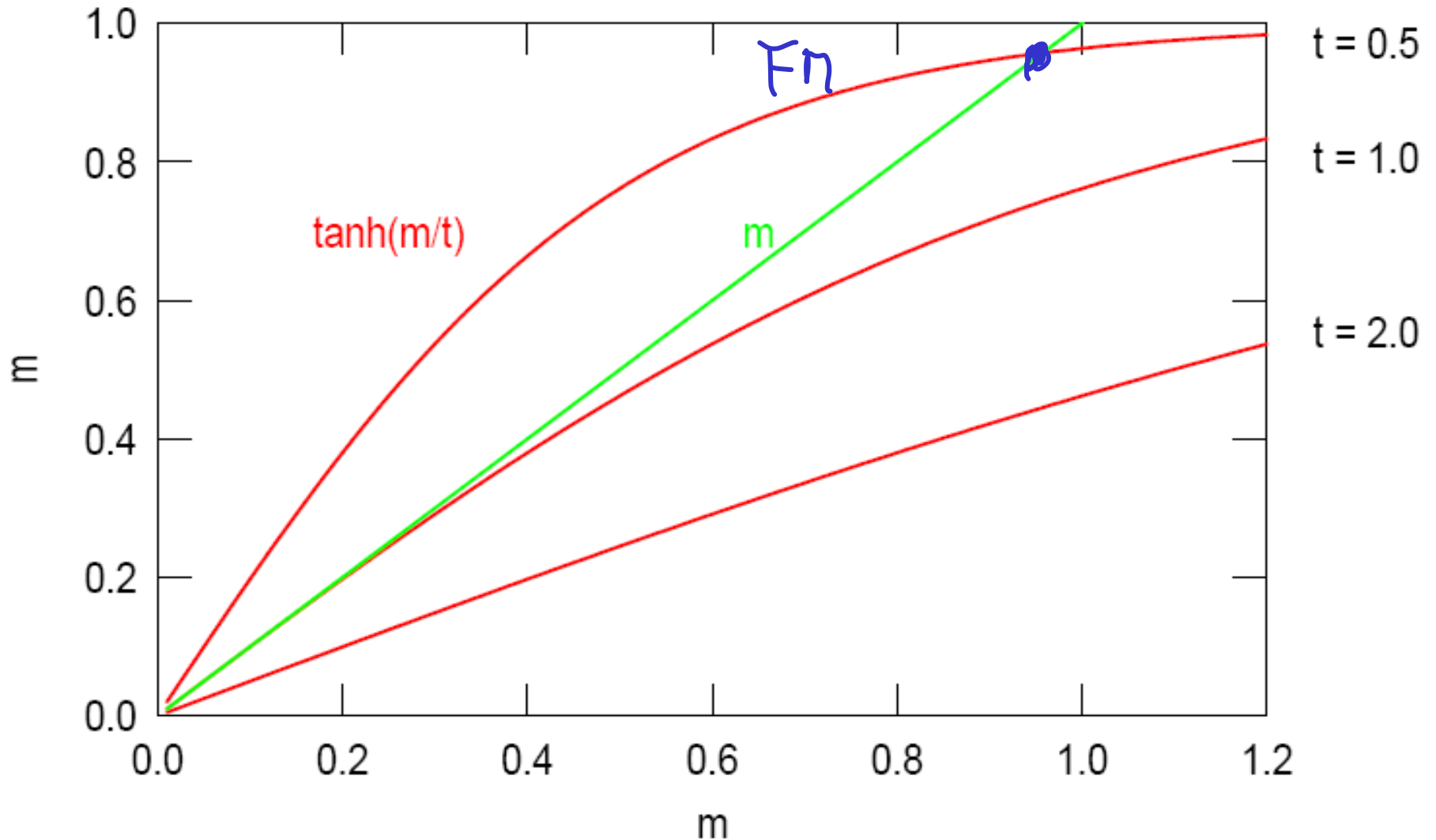
$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{N}{V} \vec{\mu} \tanh\left(\frac{\lambda \mu \mu_0 M}{k_B T}\right) \quad ; \quad m = \frac{V}{N} \frac{M}{\mu}$$

$$\Rightarrow m = \tanh\left(\frac{m}{t}\right)$$

$$t = \frac{k_B T}{N \mu^2 \mu_0 \lambda} = \frac{T}{T_c}$$

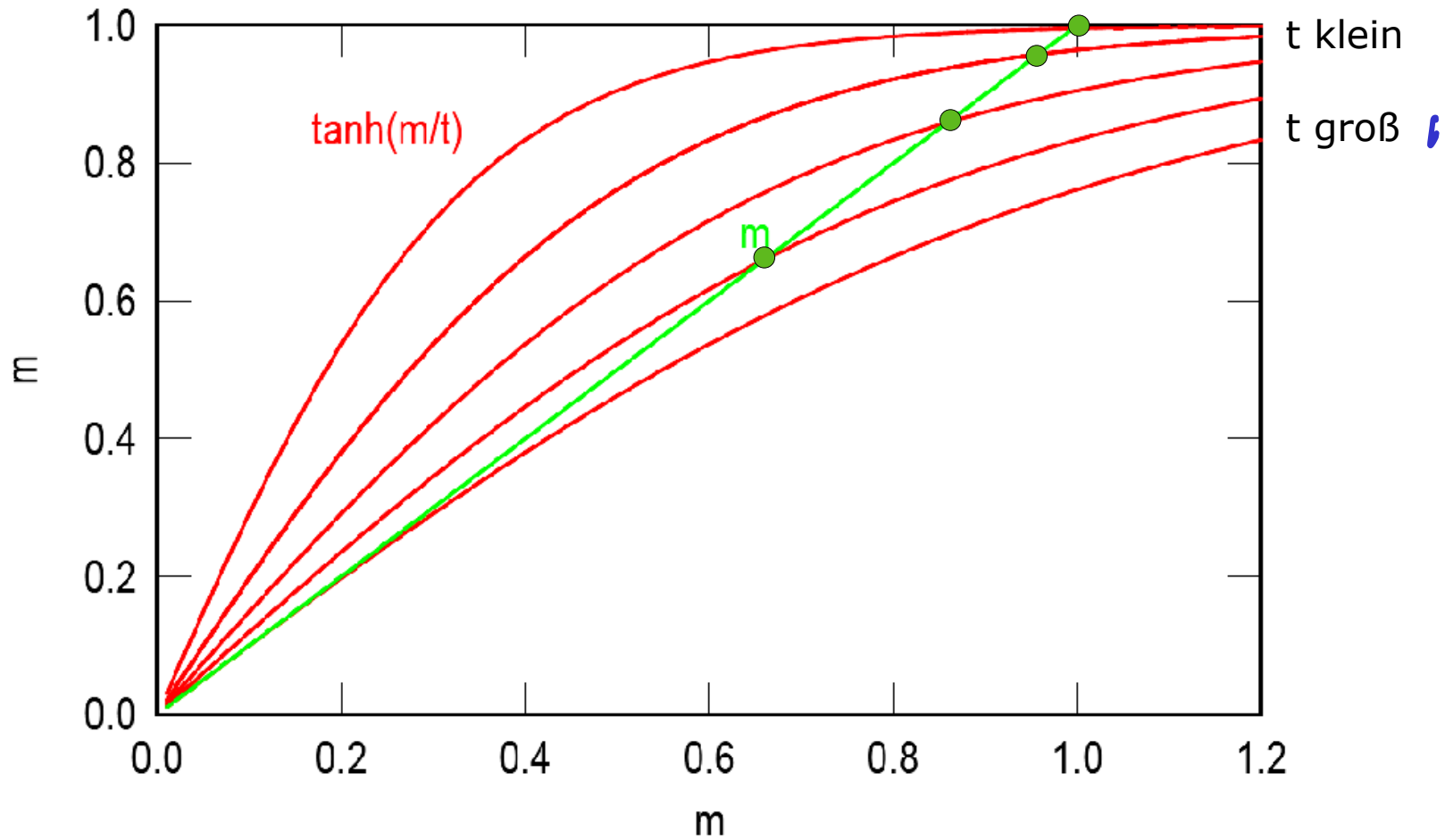
# Graphische Bestimmung der Magnetisierung eines Spin-1/2-Ferromagneten

$$m = \frac{V}{N} \frac{1}{\mu} M \quad t = \frac{k_B T}{N \mu_0 \mu^2 \lambda} = \frac{T}{T_c} \quad \text{mit } T_c = \frac{N \mu_0 \mu^2 \lambda}{k_B}$$



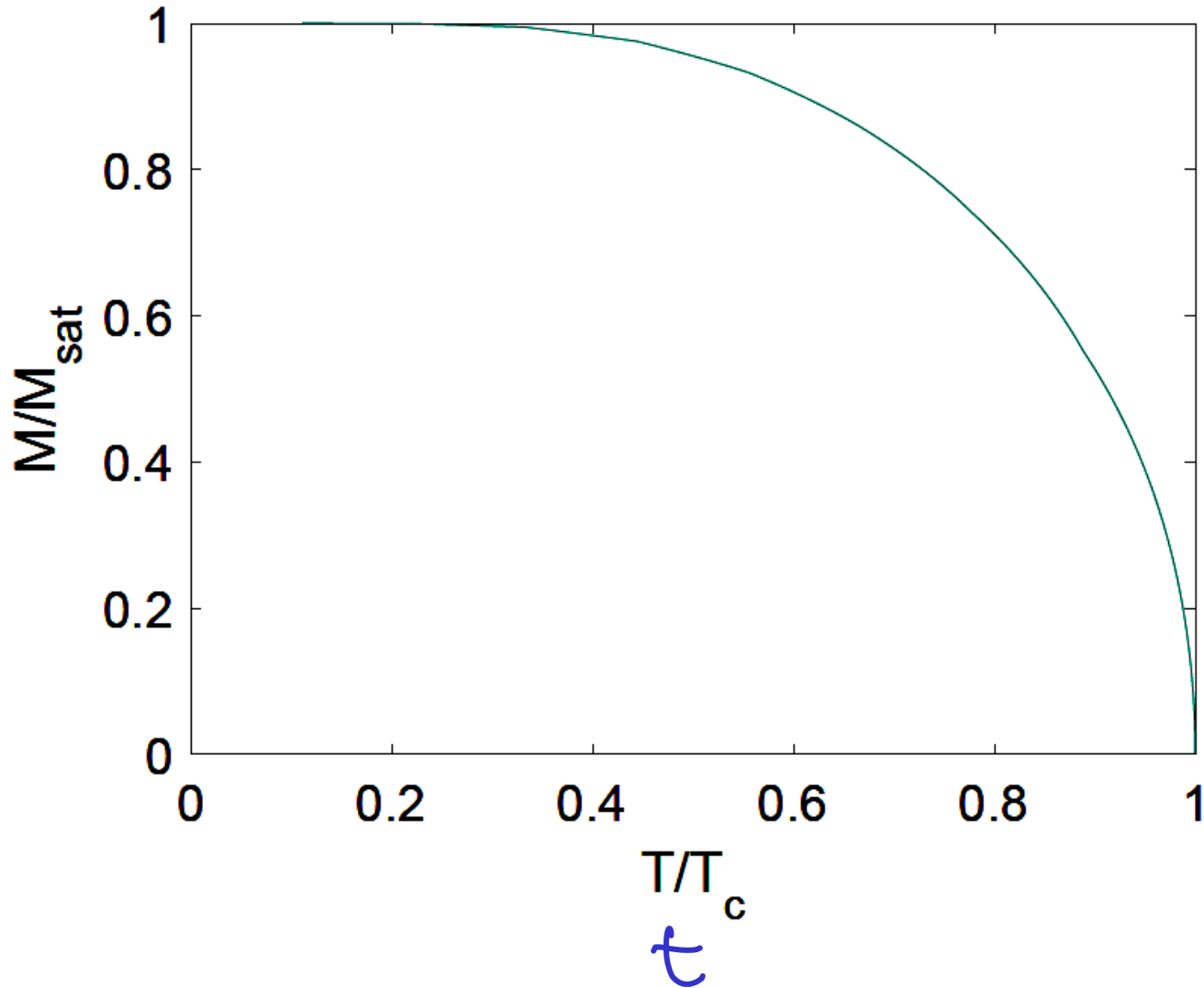
Schnittpunkt der Brillouin-Funktion  $B_{1/2}$  mit Gerade  $m=m$

# $m(t)$ in Weiss'scher MF-Näherung





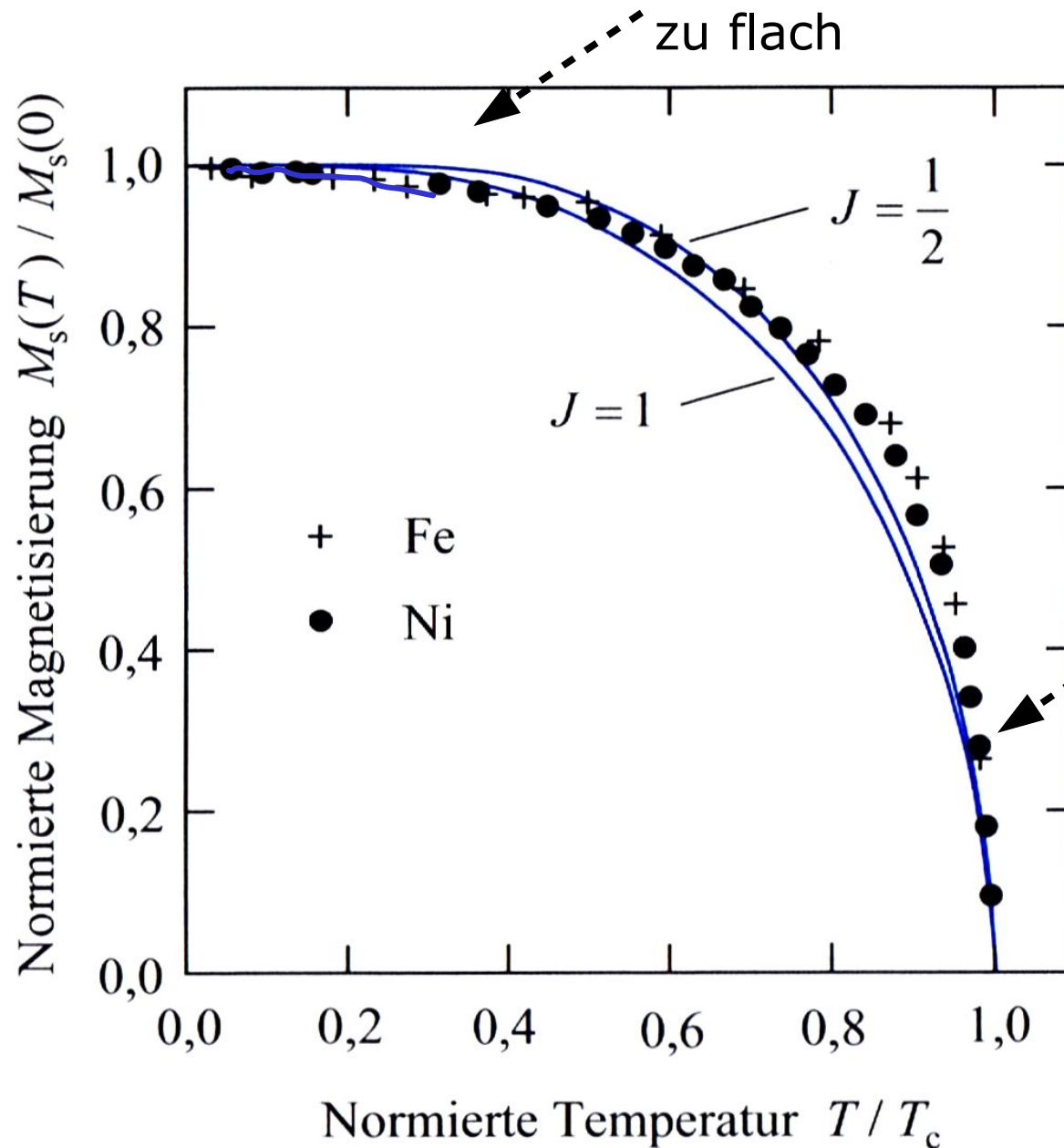
# Mean-field Solution for Spin 1/2 Ferromagnet



```
clear;
Nm=100;
Nt=10;
[m,t]=meshgrid([0:1./(Nm-1):1],[0:1./(Nt-1):1]);
F=tanh(m./t)-m;
contour(t,m,F,[0 0]);
```

# M(T): Experiment und Molekularfeldnäherung

mean field approximation



**Bild 12.7:** Spontane Magnetisierung von Nickel und Eisen als Funktion der Temperatur, aufgetragen in normierten Einheiten. Die durchgezogenen Kurven erhält man in der Molekularfeldnäherung für die Werte  $J = 1/2$  und  $J = 1$ . (Nach P. Weiss, R. Forrer, Ann. Phys. **5**, 153 (1926) ; H. Potter, Proc. Roy. Soc. (London) **A 146**, 362 (1934)).

## Problem 1 bei $T \rightarrow 0$

$$M(T) = \frac{N}{V} \mu \tanh \frac{\mu \lambda M(T) \mu_0}{k_B T}$$

für  $T \rightarrow 0$ :  $\tanh(x) \approx 1 - 2e^{-2x}$

$$M(0) - M(T) = \Delta M$$

$$= N_\mu - N_\mu \left( 1 - 2 \exp\left(-2 \frac{\mu \lambda M \mu_0}{k_B T}\right) \right)$$

$$\Rightarrow \Delta M = 2 N_\mu \exp\left(-2 \frac{N \mu^2 \lambda \mu_0}{k_B T}\right)$$

$$= 2 N_\mu \exp\left(-2 \frac{T_c}{T}\right)$$

$$\text{z.B. } T = \frac{1}{10} T_C$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \eta}{\eta} \approx 10^{-9}$$

$$\text{Exp: } 10^{-3}$$

Faktor  $10^6$  daneben!

Spinwellen

## Problem 2 bei $T \rightarrow T_c$

$$\frac{\eta}{\eta_0} \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\beta}$$

kritischer Exponent

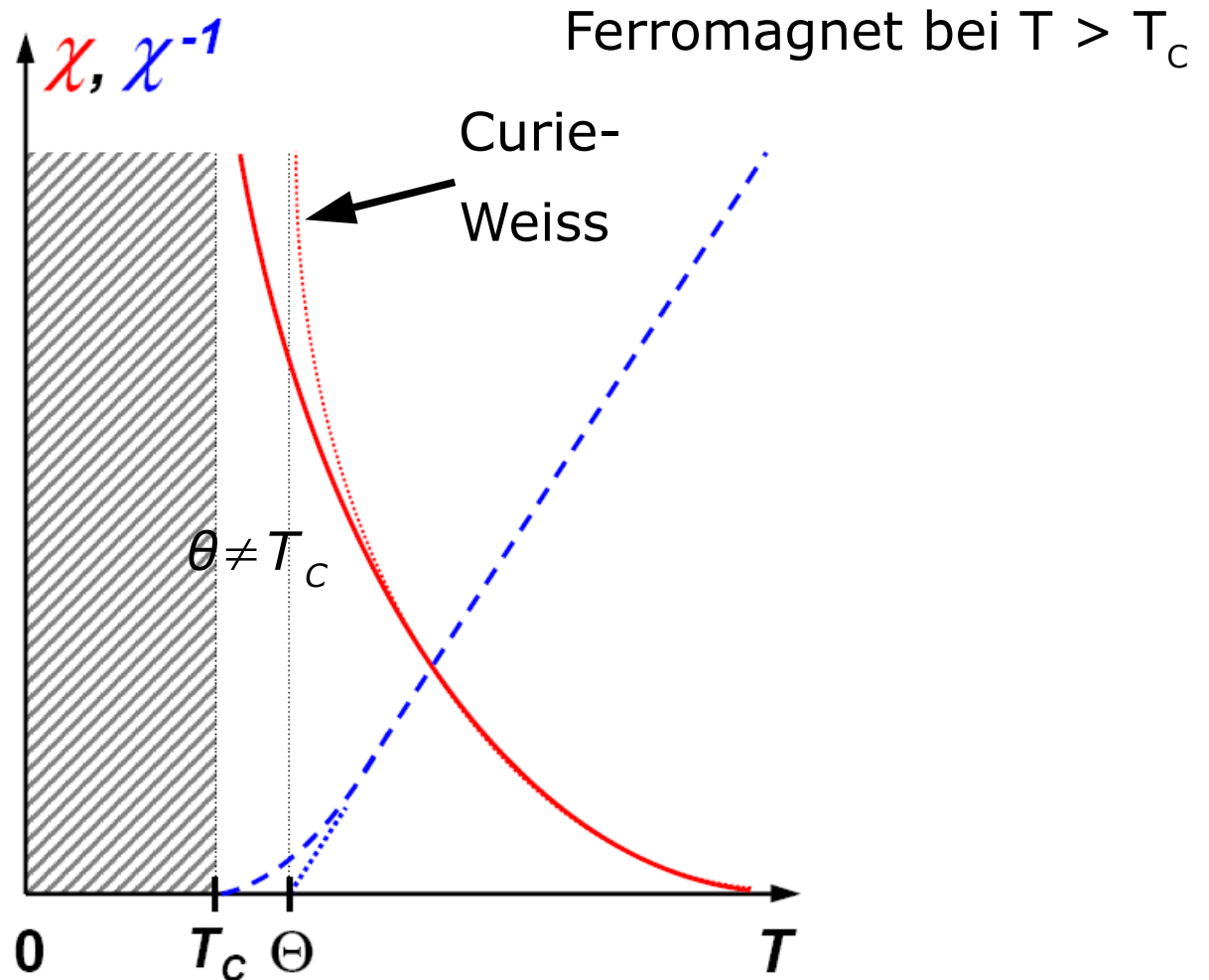
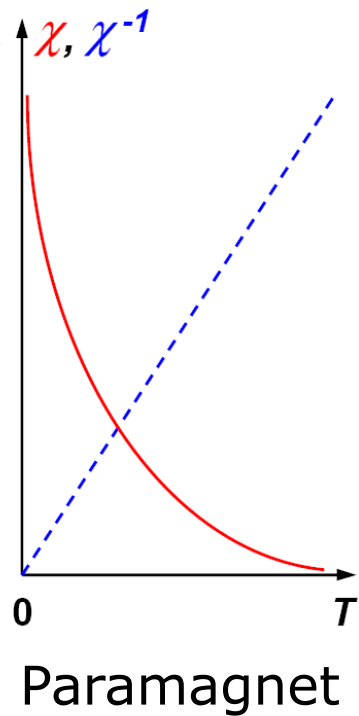
$$\eta_{\text{Feld}} : \beta = \frac{1}{2}$$

kritische Fluktuationen

$$\text{Exp} : \beta = \frac{1}{3}$$

⟨Zeig Ising 7⟩

# T-Abhängigkeiten von **Suszeptibilität** und **reziproker Suszeptibilität**



FM: Curie-Weiss-Gesetz bei  $T \gg T_C$  gute Näherung

Aber: Extrapolation von  $1/\chi$  auf 0: paramagnetische Curie-Temperatur  $\theta \neq T_C$

Ursache: langreichweitige Fluktuationen (Phasenübergang 2. Ordnung) Neel7

# "Bilanz" der Weiss'schen MF-Näherung

- Einfach & beliebt
- Curie-Weiss-Gesetz bei  $T > T_c$  o.k.
- $M(T)$  grob richtig
- kritischer Exponent  $\beta$  falsch;  $M/M_0 = (1 - T/T_c)^\beta$
- bei  $T \rightarrow 0$  Abweichungen, weil Spinwellen nicht berücksichtigt