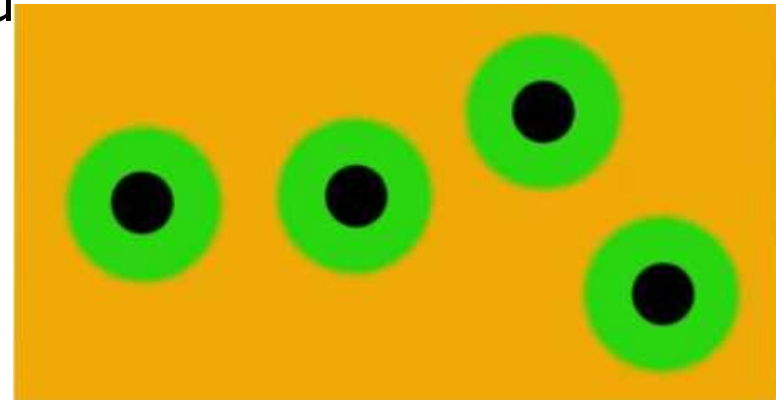


# Metalle : das DRUDE – Modell

- thermisch + elektrisch leitfähig
- formbar
- Glanz
- 2/3 aller Elemente
- Erstes Modell: Paul Drude 1900  
Ann. Physik **1**, 566; *ibidem* **3**, 364
- Motiv:
  - ◆ Entdeckung des Elektrons durch Thompson 1897
- Idee:
  - ◆ Analogie zum Atom
  - ◆ Leitungselektronen: frei beweglich, stoßend
  - ◆ darauf kinetische Gastheorie anwenden !



Kerne  
Rumpfelektronen  
Leitungselektronen(gas)



**n.b.: das ist recht mutig.**

Dichte der Leitungselektronen ca. 1000-fach größer als in Gasen

N<sub>2</sub> gasförmig: 1,250 kg/m<sup>3</sup>

flüssig (77 K): 807 kg/m<sup>3</sup>

$$n = \frac{N}{V} = N_A \cdot \frac{\text{Massendichte}}{\text{Molmasse}} \text{Valenzelektronen.je.Atom}$$

$$\approx 10^{22} \dots 2 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3} \quad r \sim 200 \text{ nm}$$

Volumen pro

Leitungselektron

$$n^{-1} = \frac{4\pi}{3} r_s^3 \quad \Rightarrow \quad r_s = \left( \frac{3}{4\pi n} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 2 \dots 5 a_0$$

a<sub>0</sub>: Bohr'scher Radius  $\sim 0.5 \frac{\text{\AA}}{3}$

Free electron  
densities

300 K  
1 bar

ELEMENT	Z	$n$ ( $10^{22}/\text{cm}^3$ )	$r_s(\text{\AA})$	$r_s/a_0$
Li (78 K)	1	4.70	1.72	3.25
Na (5 K)	1	2.65	2.08	3.93
K (5 K)	1	1.40	2.57	4.86
Rb (5 K)	1	1.15	2.75	5.20
Cs (5 K)	1	0.91	2.98	5.62
Cu	1	8.47	1.41	2.67
Ag	1	5.86	1.60	3.02
Au	1	5.90	1.59	3.01
<b>Be</b>	2	<b>24.7</b>	0.99	1.87
Mg	2	8.61	1.41	2.66
Ca	2	4.61	1.73	3.27
Sr	2	3.55	1.89	3.57
Ba	2	3.15	1.96	3.71
Nb	1	5.56	1.63	3.07
Fe	2	17.0	1.12	2.12
Mn ( $\alpha$ )	2	16.5	1.13	2.14
Zn	2	13.2	1.22	2.30
Cd	2	9.27	1.37	2.59
Hg (78 K)	2	8.65	1.40	2.65
Al	3	18.1	1.10	2.07
Ga	3	15.4	1.16	2.19
In	3	11.5	1.27	2.41
Tl	3	10.5	1.31	2.48
Sn	4	14.8	1.17	2.22
Pb	4	13.2	1.22	2.30
Bi	5	14.1	1.19	2.25
Sb	5	16.5	1.13	2.14

# Grundlegende Annahmen des Drude Modells

Kinetische Gastheorie gilt, d.h.:

- Bewegung der e geradlinig bzw. nach Newton in externen Feldern
- keine e-e Wechselwirkung (unabhängige e)
- keine e-Ionen Wechselwirkung (freie e) außer Stößen
  - instantan
  - Impuls nach Stoß ist unabhängig vom Impuls vor Stoß
  - Stoß stellt thermisches Gleichgewicht mit Umgebung her  
also Maxwell-Boltzmann Verteilung
  - Stoßrate  $1/\tau$        $\tau$ : Relaxationszeit

Sss-Drude, Preset 1

# Drude Modell - durchrechnen

Wie wirkt räumlich konstante Kraft  $\mathbf{f}$  auf mittleren Impuls?

Bewegungsgleichung aufstellen!

Gegeben: mittlerer  $\mathbf{p}$  zur Zeit  $t$ ; suchen:  $\mathbf{p}$  zur Zeit  $t + dt$

Betrachte Ensemble der Elektronen bei  $t + dt$

- $dt/\tau$  aller  $e^-$  haben Stoß erlitten; ihr Beitrag zur Änderung von  $\mathbf{p}$ :
  - ◆ Stoß änderte  $\mathbf{p}_i$  zufällig;
    - im Mittel also kein Beitrag des Ursprungsimpulses
  - ◆ Nehmen im Feld dann noch Impuls  $\sim \mathbf{f}(t) dt$  auf
  - ◆ Beitrag zu  $\mathbf{p}$  ist also  $\sim \mathbf{f}(t) dt dt/\tau \sim O(dt^2)$  ... vernachlässigen!

- 1-  $dt/\tau$  waren stoßfrei

$$\vec{p}(t+dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) (\vec{p}(t) + \vec{f}(t)dt)$$

$$= \vec{p}(t) - \frac{dt}{\tau} \vec{p}(t) + \vec{f}(t)dt + O(dt^2)$$

$$\Rightarrow \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = -\frac{dt}{\tau} \vec{p}(t) + \vec{f}(t)dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} + \vec{f}(t)$$

Impulsänderung: Reibung + externe Kraft

# Gleichstromleitfähigkeit (DC Conductivity)

Mikroskopische Deutung des Ohm'schen Gesetzes (formunabhängig)

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$\rho, \sigma$  sind eigentlich Tensoren 2. Stufe

$$\vec{f}(t) = -e\vec{E} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} - e\vec{E}$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL.:  $\vec{p}_h(t) = \vec{p}_{vor.Sto\beta} \exp(-t/\tau)$

Spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.:  $\vec{p}_{ih}(t) = -e\vec{E}\tau$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{vor.Sto\beta} \exp(-t/\tau) - e\vec{E}\tau$$

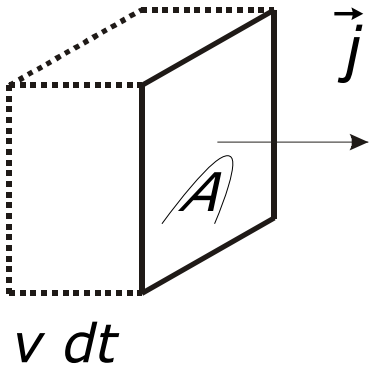
Also: Anfangsbedingungen exponentiell gedämpft.

Mittlerer Impuls im E-Feld ist zeitunabhängig (stationärer Zustand):

$$\Delta \vec{p} = -e\vec{E}\tau$$



Resultierende Driftgeschwindigkeit:  $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{p}}{m} = -\frac{e}{m} \vec{E} \tau$



$n$  Elektronendichte, Geschwindigkeit  $v$

in Zeitintervall  $dt$  tritt Volumen  $A v dt$  durch  $A$

Also:  $\mathbf{j} = n e \mathbf{v}$

$$\vec{j} = \frac{n e^2 \tau}{m} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{n e^2 \tau}{m} = n e \mu; \quad \mu = \frac{e \tau}{m} \quad \text{Beweglichkeit}$$

Typische Metalle bei Raumtemperatur:  $\tau = 10^{-15} \dots 10^{-14} \text{ s}$

# Drude Relaxation Times

$$[\tau] = 10^{-14} \text{ s}$$

Calculated from densities  
and resistivities.

Slight T-dependence of n  
is ignored.

$$\tau = \frac{0.22}{n} \left( \frac{r_s}{a_0} \right)^3 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

ELEMENT	77 K	273 K	373 K
Li	7.3	0.88	0.61
Na	17	3.2	
K	18	4.1	
Rb	14	2.8	
Cs	8.6	2.1	
Cu	21	2.7	1.9
Ag	20	4.0	2.8
Au	12	3.0	2.1
Bc		0.51	0.27
Mg	6.7	1.1	0.74
Ca		2.2	1.5
Sr	1.4	0.44	
Ba	0.66	0.19	
Nb	2.1	0.42	0.33
Fe	3.2	0.24	0.14
Zn	2.4	0.49	0.34
Cd	2.4	0.56	
Hg	0.71		
Al	6.5	0.80	0.55
Ga	0.84	0.17	
In	1.7	0.38	0.25
Tl	0.91	0.22	0.15
Sn	1.1	0.23	0.15
Pb	0.57	0.14	0.099
Bi	0.072	0.023	0.016
Sb	0.27	0.055	0.036

# Ist $\tau$ sinnvoll ?

Drude: 
$$\frac{1}{2} m \langle v_0^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$
$$\Rightarrow v_0 \tau \approx 0.1 \dots 1 \text{ nm}$$

Konsistent mit der Annahme,  
dass Elektronen mit Ionenrümpfen stoßen.

Aber diese Annahme ist FALSCH. Das ignorieren wir aber ...

Generelles Problem: wir (in PdM) haben keine Theorie für  $\tau$   
"Krücke": Betrachte nur Größen, die unabhängig von  $\tau$  sind!

# Wechselstromleitfähigkeit

Strom wird induziert durch:

$$E(t) = \operatorname{Re}(E(\omega) \exp(-i\omega t))$$

Suche stationäre Lösung  
der Bewegungsgleichung

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\tau} - eE$$

für mittleren Impuls

$$p(t) = \operatorname{Re}(p(\omega) \exp(-i\omega t))$$

$$\Rightarrow -i\omega p(\omega) = -\frac{1}{\tau} p(\omega) - eE(\omega) \quad \Rightarrow p(\omega) \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) = -eE(\omega)$$

$$\Rightarrow p(\omega) = -\frac{eE(\omega)}{\frac{1}{\tau} - i\omega}$$

$$j(\omega) = -ne \frac{p(\omega)}{m} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega} E(\omega)$$

$$= \sigma(\omega) E(\omega); \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}; \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad 13$$

## Diskussion des Ergebnisses

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(\omega) = \sigma_{DC} \quad \text{o.k.}$$

elektromagnetisches Feld ? Kein Problem da  $v/c$  klein

gilt nur bei Wellenlängen weit größer als mittlere freie Weglänge  
o.k. für sichtbares Licht

# Wellenausbreitung in Metallen

$$\operatorname{rot} H = \epsilon_0 \dot{E} + j \quad \operatorname{rot} E = -\mu_0 \dot{H} \quad \operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} H = 0$$

$$j(\omega) = \sigma(\omega) E(\omega)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\mu_0 \operatorname{rot} \dot{H} = -\mu_0 (\epsilon_0 \ddot{E} + \dot{j})$$

wegen  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \nabla^2 A$  gilt  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\nabla^2 E$

(suche Welle mit induzierter Dichte  $\rho = 0$ )

$$\Rightarrow -\nabla^2 E = -\mu_0 \epsilon_0 \ddot{E} - \mu_0 \sigma \dot{E}$$

Lösung soll Zeitabhängigkeit  $\exp(-i\omega t)$  haben ...

$$\begin{aligned} \text{aus } -\nabla^2 E &= -\mu_0 \epsilon_0 \ddot{E} - \mu_0 \sigma \dot{E} \\ &\Rightarrow -\nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 E + \mu_0 \sigma i \omega E \\ -\nabla^2 E &= \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left( 1 + \frac{i \sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega} \right) E \end{aligned}$$

$$\text{Wellengl.: } -\nabla^2 E = 1 / c^2 \ddot{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon(\omega) \ddot{E} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \epsilon(\omega) E$$

Drude  $\sigma(\omega)$  einsetzen:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i \sigma_0}{(1 - i \omega \tau) \epsilon_0 \omega}$$

$$\text{falls } \omega \tau \gg 1: \quad \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$$

Plasmafrequenz

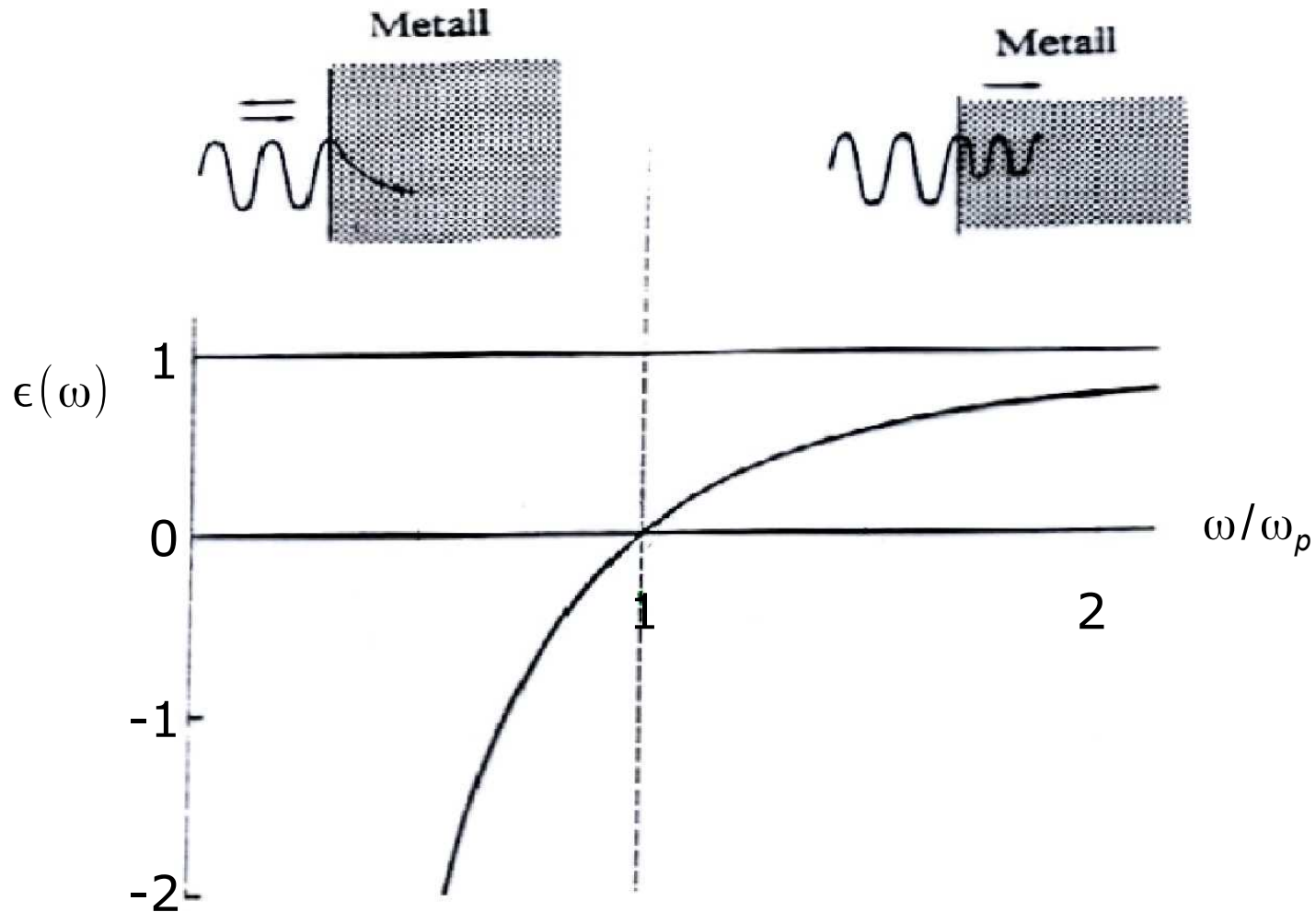
... enthält kein  $\tau$

# Wellenausbreitung

Lösungen von  $-\nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \omega^2 E; \quad E \propto \exp(-ikx)$

$\epsilon > 0$ : Wellenausbreitung möglich

$\epsilon < 0$ : exponentielle Dämpfung (  $\text{Im}(k) \neq 0$  )

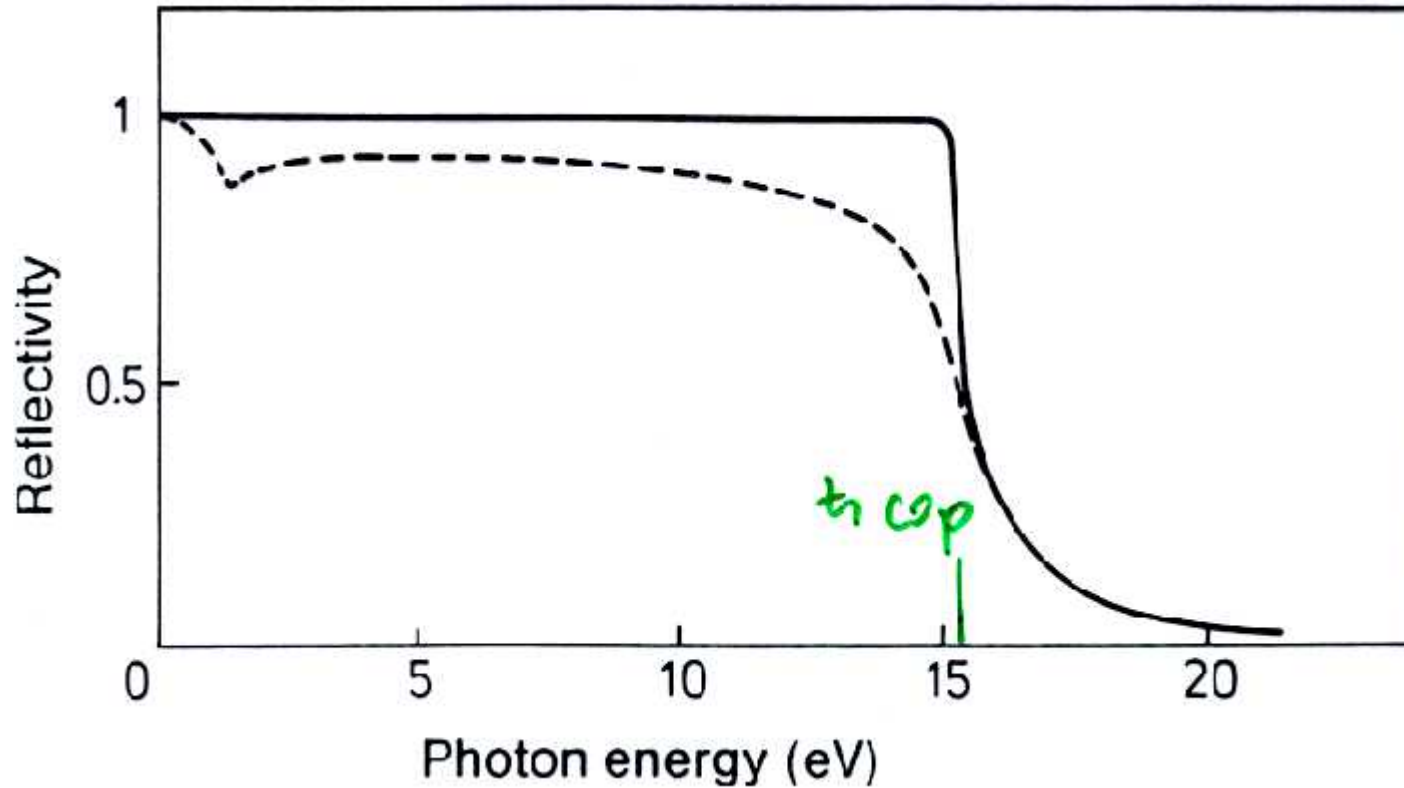




# Reflektivität

— freies Elektronengas mit  $E_p = 15,2 \text{ eV}$ ,  $\sigma = 3,6 \cdot 10^5 \text{ } \Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$

--- Aluminium



**Metalle sind durchsichtig !!**

(oberhalb von  $\omega_p$ )

# Hall effect & magnetoresistance

E. H. Hall 1879:

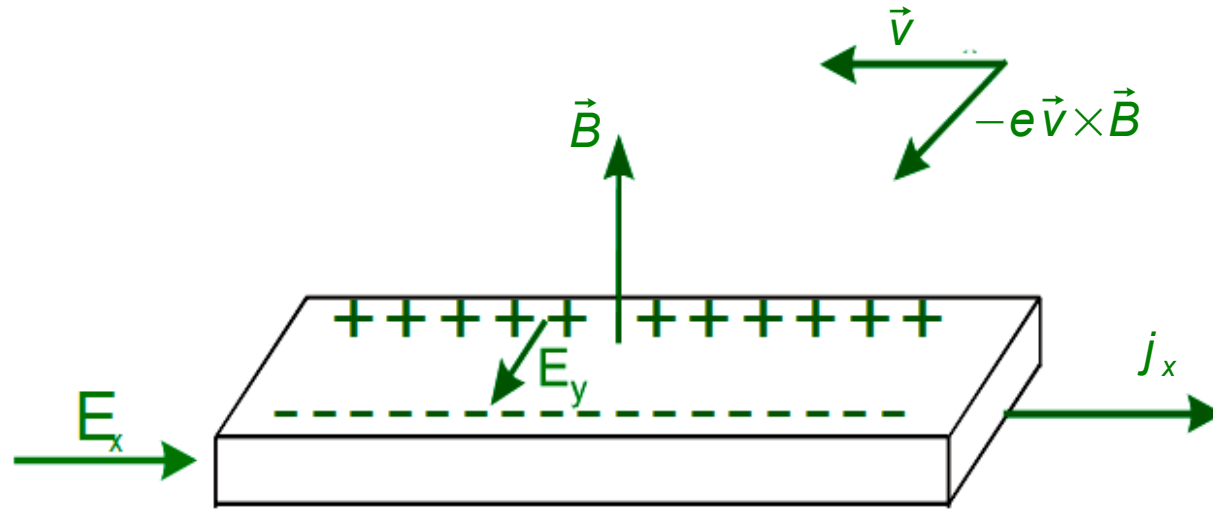
is the force on a current-carrying wire in a B-field on

(a) the wire or (b) (what we now call) the moving electrons?

If (b): current on one side, R will increase.

Experiment: No effect – but inconclusive:

"The magnet may tend to deflect without being able to do so.  
...state of stress..."



Quantities of interest:

Magneto resistance

$$\rho(B) = \frac{E_x}{j_x}$$

Hall coefficient

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B}$$

$$R_H = -\frac{1}{ne}$$

Striking result:  $R_H$  depends on a single parameter:  $n$

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left( \vec{E} + \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{B} \right) - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

$$-eE_x - \omega_c p_y - \frac{1}{\tau} p_x = 0 \quad (1)$$

$$-eE_y - \omega_c p_x - \frac{1}{\tau} p_y = 0 \quad (2)$$

Multiply by  $-\frac{ne\tau}{m}$ , use  $\vec{j} = ne\vec{v}$

$$\sigma_0 E_x = \omega_c \tau j_y + j_x \quad (1)$$

$$\sigma_0 E_y = -\omega_c \tau j_x + j_y \quad (2)$$

where  $\omega_c = \frac{eB}{m}$

cyclotron  
frequency

where  $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

Hall's experiment : no transverse current

$$(2) \Rightarrow E_y = -\frac{B}{ne} j_x \Rightarrow R_H = \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{1}{ne}$$

n.b.: sign of  $R_H \leftrightarrow$  charge of carriers

$e^-$ :  $\mathbf{v}$  to the left

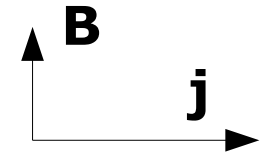
$$\mathbf{F}_L = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$e^-$  out of paper

$e^+$ :  $\mathbf{v}$  to the right

$$\mathbf{F}_L = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$e^+$  out of paper



# HALL COEFFICIENTS OF SELECTED ELEMENTS IN MODERATE TO HIGH FIELDS<sup>a</sup>

METAL	VALENCE	$-1/R_H n e c$
Li	1	0.8
Na	1	1.2
K	1	1.1
Rb	1	1.0
Cs	1	0.9
Cu	1	1.5
Ag	1	1.3
Au	1	1.5
Be	2	-0.2
Mg	2	-0.4
In	3	-0.3
Al	3	-0.3

Limiting values of  $R_H$  at very large  $B$  (order  $10^4$  G = 1 T) and very low  $T$ .

Evidently the alkali metals obey the Drude result reasonably well, the noble metals (Cu, Ag, Au) less well, and the remaining entries, not at all.

# $\omega_c$ controls motion in B-field

cyclotron frequency  $\omega_c = \frac{eB}{m}$

$$\omega_c / 2\pi = f_c [\text{GHz}] = 0.28 B [\text{T}]$$

$$\omega_c \tau \ll 1$$

**j** parallel to **E**

$$\omega_c \tau \gg 1$$

Hall angle  $\varphi$  between **j** and **E**

$$\tan \varphi = \omega_c \tau$$

---

Back to Hall's experiment

$$j_x = \sigma_0 E_x; \text{ independent of } B$$

More precise measurements:  $j_x = j_x(B)$  ... Nobel Prize 2007

# Das Drudemodell war ein enormer Erfolg.

Damoklesschwert:  $c_v$  der freien Elektronen ???