

Physikalisches Praktikum für Anfänger - Teil 1
Gruppe 3 - Atomphysik

3.3 Zählstatistik und Beta-Spektrometer

***Stichwörter** Beta Zerfall, Drehimpulserhaltung, Ladungserhaltung, Energieerhaltung, Zerfallsgesetz, statistische Verteilung, Binomial-Verteilung, Poisson-Verteilung, Gauß-Verteilung, Lorentzkraft, Relativitätstheorie, Geiger-Müller Zählrohr.*

***Hinweis:** zu diesem Versuch wird kein Laborbericht verlangt. Daher wird eine sehr gute Vorbereitung erwartet. Lesen Sie mindestens die am Ende angegebene Literatur gut durch, und recherchieren Sie in anderen Quellen (z.B. andere Aufbauten, Erwartungswerte, usw.) vor den Versuchstag.*

1 Theorie

1.1 Das Zerfallsgesetz

Instabile Atomkerne zerfallen spontan nach einem gewissen Zeitintervall dt , mit einer Wahrscheinlichkeit, die nur Isotopenabhängig ist. Es wurde bisher keine Abhängigkeit zwischen der Zerfallsrate und äußeren Bedingungen, wie Druck, Temperatur, Magnetfeld, usw. gefunden. Angenommen, dass zu dem Zeitpunkt $t = 0$ die Anzahl von unzerfallenen Kernen N_0 ist, kann man nach einer Zeit $t > 0$ die Anzahl der noch übrigen Kerne N durch das radioaktive Zerfallsgesetz angeben:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1)$$

λ ist die Zerfallskonstante, die für jeden Kern eine charakteristische Konstante ist. Nach der Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ sind die Hälfte der vorhandenen Kerne zerfallen.

1.2 Statistische Verteilungen

Das Zerfallsgesetz beschreibt das durchschnittliche Verhalten sehr vieler Kerne. Die Wahrscheinlichkeit p , dass ein bestimmter Kern innerhalb der Zeit Δt zerfällt, ist für alle Kerne gleich. Die Wahrscheinlichkeit W_B , dass innerhalb dieser Zeit von N Kernen genau x zerfallen, ist durch die Binomial-Verteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ gegeben:

$$W_B(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} \cdot p^x (1-p)^{N-x} \quad (2)$$

$$\mu = \sum_{x=0}^N x W_B(x) = Np, \quad \sigma^2 = \sum_{x=0}^N (x-\mu)^2 W_B(x) = Np(1-p) \quad (3)$$

Für eine sehr große Kernanzahl N und eine relativ zu N kleine Kernspaltungsanzahl x (nach der Zeit Δt) kann man die Binomialverteilung zu einer Poissonverteilung annähern, wobei p sehr klein wird. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit W_P , dass genau x Kerne zerfallen gleich

$$W_P(x) = \frac{(\mu)^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad \text{wo } \mu = Np, \quad \sigma^2 = Np \quad (4)$$

Die Poissonverteilung ist um den Mittelwert μ asymmetrisch. Je größer μ , desto symmetrischer wird die Verteilung (wenn $\mu \ll N$). In diesem Fall kann man die Poissonverteilung auch als eine Gaußverteilung betrachten, wobei die Wahrscheinlichkeit W_G , dass genau x Kerne zerfallen gleich

$$W_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } \mu = Np, \quad \sigma^2 = Np \quad (5)$$

ist. Damit sind 68,3% der Zählergebnisse in dem Intervall $\mu \pm \sigma$, 95,4% in dem Intervall $\mu \pm 2\sigma$, und 99,7% in dem Intervall $\mu \pm 3\sigma$ zu finden.

1.3 Der β -Zerfall

Bei diesem Versuch zum β -Zerfall wird im Gegensatz zu den übrigen Versuchen dieses Praktikums, bei denen Prozesse in der Elektronenhülle der Atome untersucht werden, die Auswirkung der schwachen Wechselwirkung im Kern des Atoms betrachtet.

Die meisten radioaktiven Elemente sind β -Strahler, d.h. sie senden energiereiche Elektronen aus. Das Elektron wird bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton aus dem Kern emittiert. Diese Kernumwandlung bezeichnet man als β^- -Zerfall, der nach folgender Reaktionsgleichung verläuft:



Dabei bedeuten: n Neutron, p^+ Proton, e^- Elektron und $\bar{\nu}_e$ Antineutrino.

Daneben existieren noch zwei weitere β -Zerfallsarten, der K -Einfang und der β^+ -Zerfall, die in den gängigen Lehrbüchern der Atom- bzw. Kernphysik beschrieben werden.

Die Spektren von α - und γ -Strahlern unterscheiden sich deutlich von denen der β -Strahler. α - und γ -Strahler emittieren Strahlung mit einem oder einigen wenigen, diskreten Energiewerten. β -Strahler senden dagegen ein kontinuierliches Energiespektrum aus, angefangen von beliebig kleinen Energien bis zu einer für diesen speziellen Zerfall charakteristischen Grenzenergie. Ist dem kontinuierlichen β -Spektrum noch ein diskretes Spektrum überlagert, so handelt es sich hierbei um sogenannte Konversionselektronen, die durch die Wechselwirkung des angeregten Kerns mit den Elektronen der unteren K-Schale in Konkurrenz zur Emission eines γ -Quants ausgesandt werden. Die Energiezustände der Kerne vor und nach β -Emission sind unabhängig von der Energie des emittierten Elektrons. Da ferner das ausgesandte Elektron einen Spin besitzt und der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße darstellt, wurde von Pauli die Existenz des Neutrinos vorgeschlagen, welches ebenso wie das Elektron einen halbzahligen Spin besitzt. Die Gesamtenergie ist gleich der oberen Grenzenergie der Elektronen (Grenzenergie des Spektrums), sie verteilt sich auf das Neutrino und das β -Teilchen.

2 Versuchsaufbau und Messtechnik

2.1 Wahrscheinlichkeitspapier

Zur Überprüfung einer Verteilung ist es oft einfacher die Verteilungsfunktion zu verwenden anstatt der Dichte. Die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ ist definiert als die Wahrscheinlichkeit eine Messung zwischen $-\infty$ und z zu finden. Wenn W_G (Gleichung 5) aufintegriert wird, bekommt man die entsprechende Gauß'sche Verteilungsfunktion:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z W_G(x) dx \quad (7)$$

wobei $\Phi(z \rightarrow \infty) = 1$ und $\Phi(z = \mu) = 0.5$ sind. Im Wahrscheinlichkeitspapier ist die y Achse nicht linear aufgeteilt, sie ist so aufgeteilt, dass eine Gaußverteilung (also $\Phi(z)$) immer eine Gerade ergibt. So kann der rechnerisch aufwendige Fit an einer Gaußverteilung durch graphische Auftragung auf Wahrscheinlichkeitspapier durchgeführt werden. In diesem Versuch werden die aufsummierten Häufigkeiten eines Histogramms gegen die rechte Intervallgrenze der zu dieser Summe gehörenden Histogrammbalken aufgetragen. Die Schnitpunkte μ , $\mu \pm \sigma$ und $\mu \pm 2\sigma$ sind auf dem Wahrscheinlichkeitspapier gekennzeichnet, um den Mittelwert und die Standardabweichung zu bestimmen.

2.2 β -Spektrometer

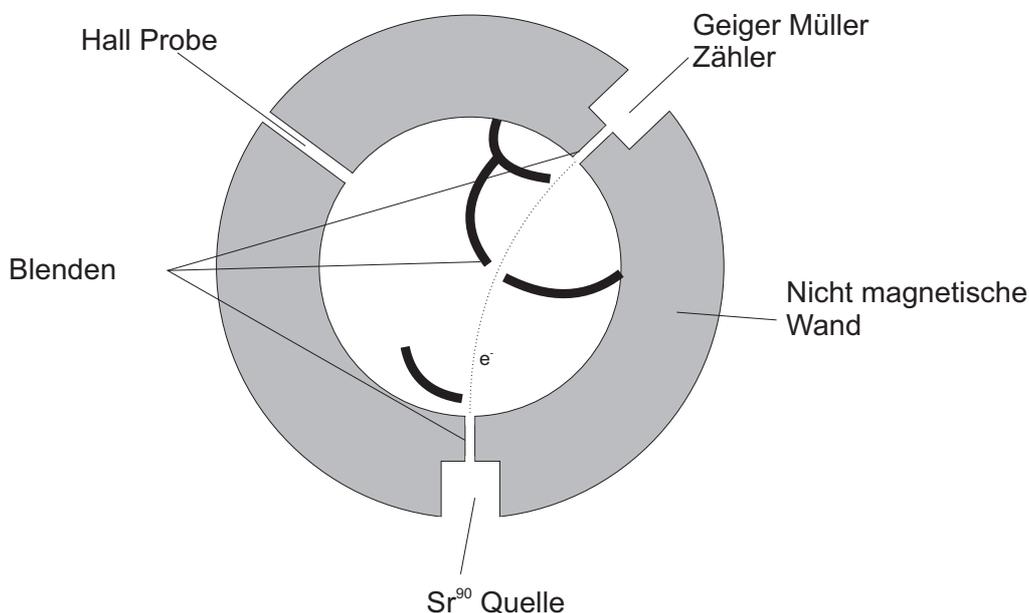


Abbildung 1: Skizze des β -Spektrometers

Die Impulsverteilung der β -Strahlung eines radioaktiven Präparates wird mit einem β -Spektrometer (siehe Abb. 1) bestimmt:

Die von dem Präparat (Sr^{90}) ausgesandte Beta-Strahlung wird in einem nichtmagnetischen Hohlraum durch einen Spalt und mehrere Blenden zu einem schwach divergierenden Elektronenstrahl geformt. Unter dem Einfluss des senkrecht zur Zeichenebene wirkenden homogenen Magnetfeldes werden die Elektronen durch die Lorentzkraft auf Kreisbahnen abgelenkt. Die Radien sind dabei abhängig von der Geschwindigkeit, bzw. dem Impuls der Elektronen und der Magnetflussdichte. Nach dem Durchlaufen der Bahn findet für Elektronen gleicher Geschwindigkeit eine Fokussierung statt. Durch einen Austrittsspalt gelangen die Elektronen in das Zählrohr und werden anschließend vom Zähler registriert. Verändert man nun die Stromstärke durch den Elektromagneten und damit das Magnetfeld, so gelangen nur diejenigen Elektronen zum Zählrohr, deren Geschwindigkeit so groß ist, dass ihr Ablenkradius genau 50 mm beträgt. Die Intensität liest man am Zähler ab. Die Magnetflussdichte wird mit dem Magnetometer gemessen.

3 Vorbereitungsaufgaben

Vor dem Versuchstag, lesen Sie die angegebene Bibliographie und suchen Sie auch eigenständig andere zusätzliche Quellen um die Vorbereitungsfragen zu beantworten.

1. Bestimmen Sie den Bahnradius r eines Elektrones mit einem Impuls p unter der Wirkung eines zum Impuls senkrechtstehendes Magnetfeld B .
2. Geben Sie die Ausdrücke für den relativistischen Impuls, Gesamtenergie und kinetische Enrgie an.
3. Erklären Sie die 5 „As“ des Strahlenschutzes. Wie wird in diesem Versuch dafür gesorgt, dass das Minimierungsgebot des Strahlenschutzes erfüllt wird?

4 Durchführung

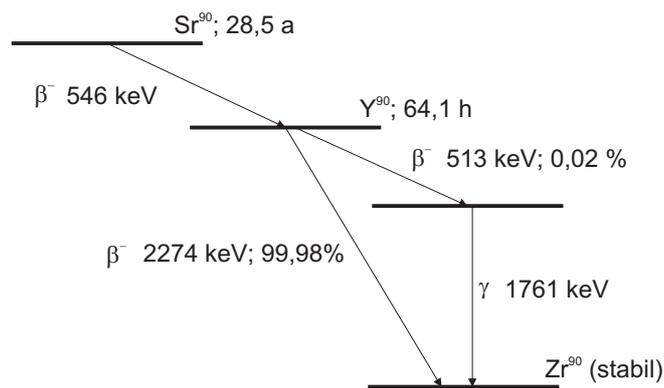
HINWEIS: Der Strom im Elektromagnet darf nicht 4 A überschreiten

4.1 Zählstatistik

1. Stellen Sie das Magnetfeld so ein, dass Sie die Zählrate im Zählrohr maximieren (ungefähr 40/s). Stellen Sie bei einer Zählzeit von einer Sekunde die Häufigkeitsverteilung für mindestens 600 Messungen fest.
2. Zeichnen Sie ein Histogramm der Messdaten.
3. Berechnen Sie für jedes Messergebnis x_i die relative Häufigkeit und bis zu der jeweiligen oberen Intervallgrenzen von x_i die Summe der relativen Häufigkeiten $S(x_i)$. Tragen Sie dann $S(x_i)$ gegen x_i auf Wahrscheinlichkeitspapier auf, bestimmen Sie daraus σ und μ . Erklären Sie aus der Zeichnung, ob die Ergebnisse normalverteilt sind.

4.2 β -Spektrometer

1. Messen Sie die Zählrate für jeweils eine Minute bei ansteigenden Magnetflussdichten B durch den Elektromagneten (0,00 mT bis 320 mT in Schritten von 10 mT). **Der Strom darf dabei nicht 4 A überschreiten!**. Um den Punkt genau zu bestimmen, bei dem gerade noch Elektronen zu registrieren sind (Zählrate = Nullrate), muss im Bereich hoher Magnetflussdichten ($B = 200 \text{ mT} \dots 300 \text{ mT}$) der Abstand der Messpunkte verringert werden ($\Delta B = 5 \text{ mT}$).
2. Tragen Sie die Zählraten gegen die magnetische Induktion B auf.
3. Berechnen Sie mit Hilfe von der Gleichung aus der Vorbereitungsaufgabe 1 den maximalen Impuls der Elektronen. Bestätigen Sie, dass es sich um relativistische Elektronen handelt, indem Sie aus dem klassischen Impuls mit der Ruhemasse die Geschwindigkeit berechnen (Vorbereitungsaufgabe 2). Berechnen Sie danach $\beta = v/c$, bzw. v aus der relativistischen Beziehungen. Und daraus dann die Gesamtenergie und die Masse. Vergleichen Sie die Masse mit der Ruhemasse der Elektronen. Bestimmen Sie die Kernumwandlungs-Energie des Präparats und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Zerfallsdiagramm vom Sr^{90} in Abbildung 2.
4. Polen Sie den Elektromagneten um und messen Sie die Zählrate für eine Minute bei einem Magnetfeld von ungefähr -200 mT . Ist die Zählrate anders als bei $+300 \text{ mT}$? Erklären Sie die möglichen Abweichungen.

Abbildung 2: Zerfallsdiagramm des Sr^{90} .**Hinweise:**

- Der Ablenkradius beträgt 50 mm.
- Nehmen Sie das Präparat nicht aus dem Spektrometer.
- Denken Sie an das Induktionsgesetz und stellen Sie den Strom langsam auf 0, bevor Sie ihn ausschalten!

Quellen für die Anleitung:

- Anleitung *Versuch Rad* physikalisches Grundpraktikum der Universität Bayreuth.
- Phywe Anleitung β -Spektrometer.

Literatur: D. Meschede *Gerthsen Physik*, Kap. 13.8, 19.2, 25. Auflage (2015).