Physikalisches Praktikum für Anfänger - Teil 1
Gruppe 3 - Atomphysik

3.4 Bestimmung der Rydberg-Konstanten aus der Balmer-Serie des Wasserstoffs

Stichwörter: *Elektronenzustand, Wasserstoffatom, Rydbergkonstante, Gittergleichung, MAdelung-Verfahren, Emissionsspektrum*

Hinweis: *zu diesem Versuch wird kein Laborbericht verlangt. Daher wird eine sehr gute Vorbereitung erwartet. Lesen Sie mindestens die am Ende angegebene Literatur gut durch, und recherchieren Sie in anderen Quellen (z.B. andere Aufbauten, Erwartungswerte, usw.) vor dem Versuchstag.*

1 Methode und Theorie

Sowohl ältere quantentheoretische Rechnungen (*Bohr*) als auch die Quantenmechanik (*Schrödinger*) liefern für die Energieniveaus des Elektrons beim Wasserstoff unter Vernachlässigung der Mitbewegung des Protons um den Schwerpunkt des Atoms:

$$E_\mathrm{n} = -\frac{m_\mathrm{e} e^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \; . \tag{1}$$

Die durch Übergänge von Elektronen von höheren zu niedrigeren Niveaus verursachten Emissionslinien liegen beim Wasserstoff ($Z = 1$) somit (d.h. bei unendlich großer Masse des Kerns) bei den Frequenzen:

$$\begin{aligned} \nu_{\mathrm{n_1,n_2}} &= \frac{m_\mathrm{e} e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) & (2) \\ &= R_\infty \cdot c \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad \text{mit} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 < n_2 \; . & (3) \end{aligned}$$

R_∞ ist die Rydberg-Konstante:

$$R_\infty = \frac{m_\mathrm{e} e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 10,974 \cdot 10^6 \ \frac{1}{\mathrm{m}} \; . \tag{4}$$

Die zugehörige Energie berechnet sich zu:

$$E_\mathrm{R} = R_\infty \cdot h \cdot c = 13,6 \ \mathrm{eV} \; . \tag{5}$$

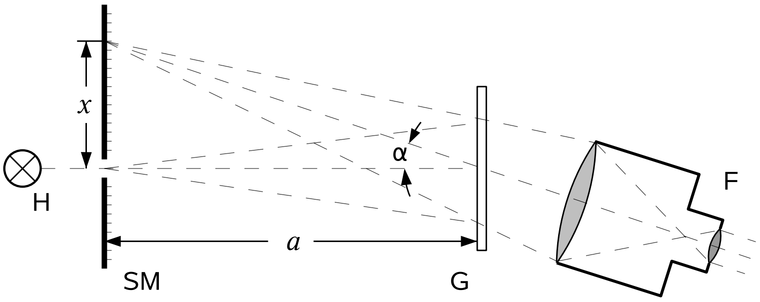
Unter Berücksichtigung der Mitbewegung des Kerns um den Schwerpunkt des Atomes ergibt sich:

$$\nu_{\mathrm{n_1,n_2}} = R_\mathrm{H} \cdot c \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad \text{mit} \quad R_\mathrm{H} = \frac{R_\infty}{\left(1 + \frac{m_\mathrm{e}}{M_\mathrm{H}}\right)} \; . \tag{6}$$

Dabei sind m_e die Masse des Elektrons und M_H die Masse des Kerns ($M_\mathrm{H}/m_\mathrm{e}$ = 1836).

2 Versuchsaufbau

Das H_2-Geißlerrohr steht hinter einem Spalt mit einer Messskala. Mit dem Fernrohr betrachtet man den Spalt durch ein Strichgitter. Die virtuellen Spaltbilder der roten H_α-, der blau-grünen H_β- und der violetten H_γ-Spektrallinie erscheinen seitlich vom Spalt vor der Skala.



H – H_2-Geißlerrohr
SM – Spalt mit Messskala
G – Gitter
F – schwenkbares Fernrohr mit Fadenkreuz

Abbildung 1: Versuchsaufbau

Der Beugungswinkel α für ein Maximum n-ter Ordnung ergibt sich aus dem Abstand $2x$ zwischen linkem und rechtem Beugungsbild und der Entfernung a der Messskala vom Gitter nach der Beziehung (siehe Abb. 1):

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,. \tag{7}$$

Nach der Theorie des Gitters erhält man bei einer Wellenlänge λ und einer Gitterkonstanten d das Beugungsbild n-ter Ordnung bei dem Beugungswinkel α mit:

$$\sin\alpha = \frac{n\cdot\lambda}{d}\,. \tag{8}$$

3 Durchführung

1. Zur Bestimmung der Gitterkonstanten d wird eine Natriumdampflampe ($\lambda_{\mathrm{Na-D}}$ = 589,3 nm) verwendet. Durch Auflösen von Gl. (8) nach d erhält man mit Gl. (7):

$$d = \frac{n\cdot\lambda}{\sin\alpha} = n\cdot\lambda\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,. \tag{9}$$

   Um ein genaueres Resultat zu erhalten, werden die Beugungswinkel in mehreren Ordnungen (hier möglichst 3) bestimmt, indem jeweils der Abstand von linker zu rechter Ordnung gemessen und dann die Gitterkonstante als gewichtetes Mittel errechnet wird. Schalten Sie während der Einstellung der Linie auf das Fadenkreuz im Fernrohr die Hilfslampe neben dem Fernrohr ein, um im Streulicht das Fadenkreuz besser erkennen zu können. So wird das Fernrohr auf die auszumessende Linie eingestellt. Erst danach wird die Skalenbeleuchtung angeschaltet, um den Ort des Fadenkreuzes auf der Skala abzulesen.

2. Bestimmen Sie die Wellenlängen der Linien H_α, H_β, H_γ der Balmer-Serie des Wasserstoffs. Nach Gl. (9) ist

$$\lambda = \frac{d}{n}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,. \tag{10}$$

   Die Grenzfrequenz ν_∞ dieser Serie kann mit Hilfe des *Madelungschen Extrapolationsverfahrens* bestimmt werden:
   Tragen Sie dazu die Frequenzen $\nu = c/\lambda$ der Serie auf der y-Achse eines Diagramms auf (siehe Abb. 2). Auf der x-Achse werden die Punkte $1/{n_2}^2$ für n_2 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 markiert und die Messwerte für die Frequenzen auf die Senkrechten in diesen Punkten übertragen.
   Nach Gl. (6) ist der Zusammenhang zwischen ν und $1/{n_2}^2$ eine abfallende lineare Funktion mit n_1 als

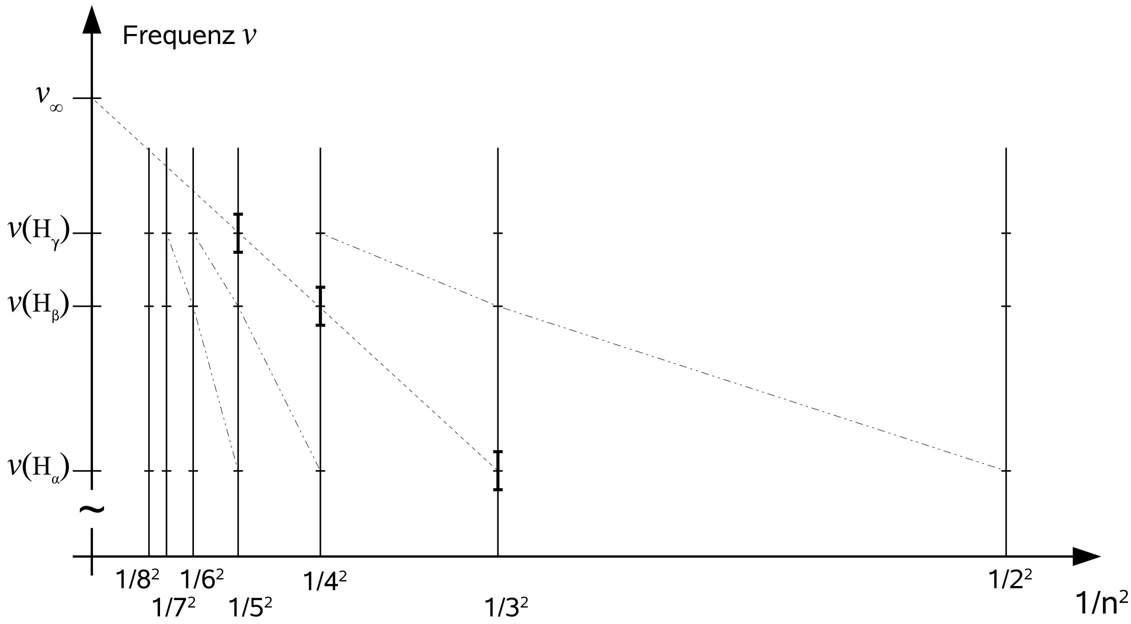


Abbildung 2: Skizze zum Madelung-Verfahren

zunächst unbekanntem Parameter. Um zu ermitteln, zu welchen n_2 die drei gemessenen Spektrallinien gehören, verbindet man im Diagramm die Messpunkte auf jeweils drei benachbarten Senkrechten ($n_2 = k, k+1, k+2$). Die richtigen Punkte müssen dabei unter Berücksichtigung der Messfehler (Fehlerbalken) auf einer Geraden liegen. Durch Extrapolation dieser Geraden auf die y-Achse ($n_2 \to \infty$) wird ν_∞ ermittelt.

3. An der konstruierten Geraden kann man außerdem erkennen, zu welcher Serie (Lyman, Balmer, Paschen, Bracket oder Pfund) die gemessenen Spektrallinien H_α, H_β, ... gehören. Welche Werte von n_1 und n_2 in Gl. (6) sind den drei Linien zuzuordnen?
Die Rydberg-Konstante berechnet sich nach

$$R_\infty = \frac{4 \cdot \nu_\infty}{c} \cdot \left(1 + \frac{m_e}{M_H}\right). \tag{11}$$

Vergleichen Sie den experimentell erhaltenen Mittelwert von R_∞ mit dem theoretischen.

4. Bestimmen Sie in einer Fehlerrechnung die Fehler der Gitterkonstanten d und der Wellenlängen λ_{H_α}, λ_{H_β} und λ_{H_γ} unter Beachtung der Fehlerfortpflanzung. Schätzen Sie die Genauigkeit von R_∞ ab.

Literatur: D. Meschede, *Gerthsen Physik*, Kap. 11.1, 15.2, 25. Auflage (2015).

7.2016/Ra, VdM