3.12 Fourier-Analyse

1 Einführung

Wie bereits in Versuch 3.5 erwähnt, kann jedes periodisches Signal $x(t)$ nach dem Satz von Fourier als Überlagerung von sinus- bzw. cosinusförmigen Anteilen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(k\omega t + \varphi_k). \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei berechnen sich die Koeffizienten a_k und b_k zu

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (k=0,1,2,3,\ldots) \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (k=1,2,3,\ldots) \end{aligned} \qquad \text{mit}\, T=\frac{2\pi}{\omega}. \tag{2}$$

und A_k und φ_k zu

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2} \\ A_k &= \sqrt{a_k^2+b_k^2} \quad (k=1,2,3,\ldots) \\ \varphi_k &= \arctan\frac{a_k}{b_k}. \end{aligned} \tag{3}$$

T ist die Periodendauer des Signals $x(t)$. Die zugehörige Frequenz ω heißt Grundwelle. Daneben gibt es sog. Oberwellen. Das sind immer ganzzahlige Vielfache der Grundwelle.

Aus diesen Überlegungen ergeben sich für das Signal zwei mögliche Darstellungsformen: als Zeitsignal $x(t)$ und als Frequenzspektrum $X(\omega)$.

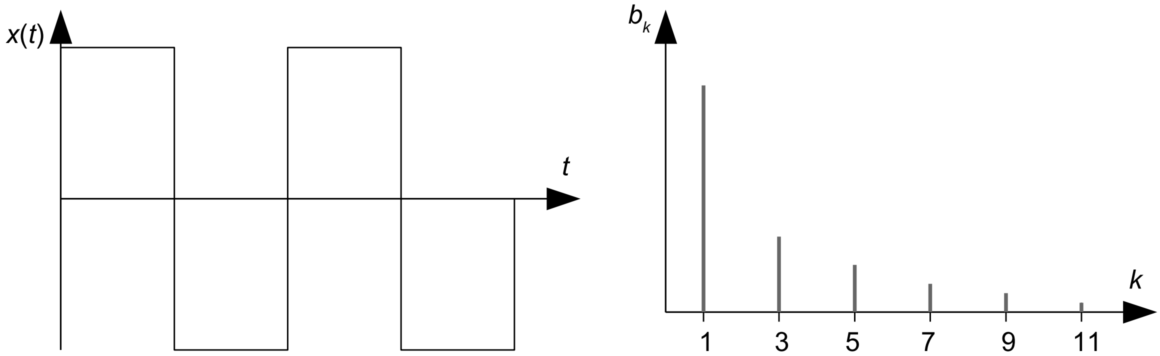

Abb. 1: Rechtecksignal: links als Zeitsignal, rechts als Spektrum

Die Abbildung zeigt als Beispiel ein rechteckförmiges Signal. Im Frequenzspektrum gibt es hier neben der Grundwelle ($k = 1$) nur ungeradzahlige Vielfache davon als Oberwellen ($k = 3,5,..$). Die zugehörigen Koeffizienten a_k sind alle 0, die b_k sind proportional zu $1/n$.

Dieses Prinzip lässt sich auch auf nichtperiodische Signale erweitern. Die Fourier-Reihe wird dann ersetzt durch das Fourier-Integral, bzw. die Fourier- oder die Laplace-Transformation. Man erhält damit ein sehr leistungsfähiges Werkzeug für die Theorie der Signalverarbeitung in linearen Systemen. Da die genannten Transformationen in beiden Richtungen definiert sind, ergibt sich eine grundsätzliche Äquivalenz zwischen der Darstellung im Zeit- und im Frequenzbereich.

Im vorliegenden Versuch sollen die Möglichkeiten von LabView benutzt werden, um einen kleinen Einblick in Darstellung von periodischen Signalen im Frequenzbereich zu erhalten.

2 Versuchsdurchführung

Für diesen Versuch gibt es ein fertiges Programm *F-Analys.vi* im Unterverzeichnis *Fourier*. Es lassen sich damit verschiedene Grundtypen für die Zeitfunktion (Sinus, Rechteck, Dreieck, Sägezahn) auswählen. Grundfrequenz und Tastverhältnis beim Rechtecksignal sind einstellbar. Das Programm berechnet für jede Zeitfunktion das zugehörige Linienspektrum (siehe auch Abb. 1). Es werden dabei nur die Koeffizienten A_k (siehe Formel (1) und (3)) angezeigt.

Es wird empfohlen, bei der Versuchsdurchführung das LabView-Programm im kontinuierlichen Modus zu betreiben. Alle Änderungen an den Einstellungen werden so sofort sichtbar.

Aufgaben:

2.1 Stellen Sie nacheinander die verschiedenen Signalformen ein, und betrachten Sie die sich ergebenden Spektren (Ausdrucke). Welche Oberwellen mit welchen Amplituden findet man beim

- 2.1.1 sinusförmigen Signal,
- 2.1.2 beim rechteckförmigen Signal (Tastverhältnis 50%),
- 2.1.3 beim Dreicksignal,
- 2.1.4 und beim Sägezahnsignal.

2.2 Warum fehlen beim Rechtecksignal die geradzahligen Oberwellen, und warum sind alle Koeffizienten a_k immer 0?

2.3 Stellen Sie ein Rechtecksignal mit einem Tastverhältnis von 75% ein. Welche Oberwellen fehlen im Spektrum?

2.4 Erhöhen Sie das Tastverhältnis schrittweise bis auf 99%, und beobachten Sie die sich ergebenden Spektren. Bei welchen Tastverhältnissen verschwinden einzelne Oberwellen?

2.5 Stellen Sie das Tastverhältnis wieder auf 50% und erhöhen jetzt die Anzahl der Perioden im Zeitfenster. Welchen Einfluss hat dies auf die Spektren?

5.2011/Ra