

1.2 Messung der Präzession eines Kreisels

Stichwörter: Präzession, Kreisel, Drehimpuls, Drehmoment, Stroboskop, Methode der kleinsten Quadrate.

1 Einleitung

In der Einleitung zum klassischen Lehrbuch "Über die Theorie des Kreisels" von Felix KLEIN und Arnold SOMMERFELD (1910) kann man lesen:

"...Der Kreisel ist vor allen anderen mechanischen Vorrichtungen geeignet, den Sinn für wirkliche Mechanik zu wecken ..." und Sir John HERSCHEL belegte ihn in seinen "Outlines of Astronomy" (1850) mit dem Namen eines "philosophical instrument". Dass dieser Name gerechtfertigt ist, mag vielleicht bereits der relativ einfache Versuch dieser Aufgabe erkennen lassen.

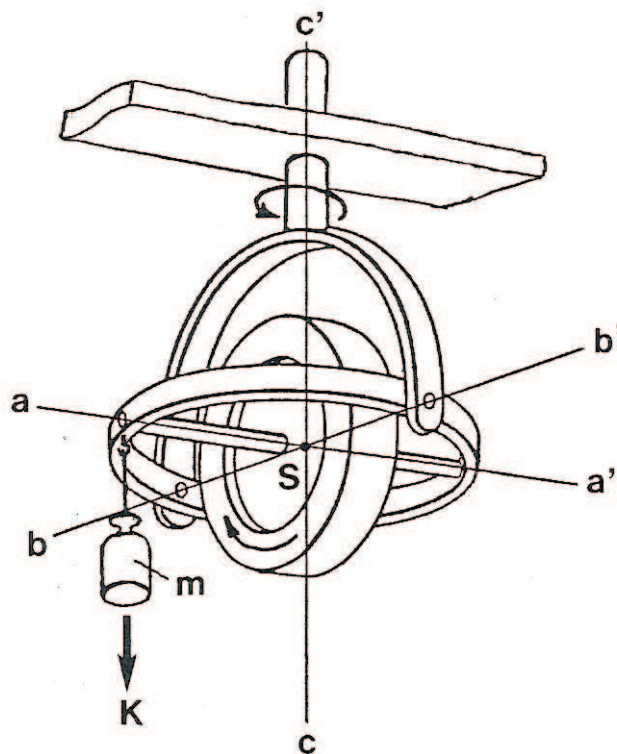


Fig.1: Kardanische Aufhängung des Kreisels

Man betrachte einen schnell um die Achse aa' rotierenden nutationsfreien Kreisel, der "kräftefrei" kardanisch aufgehängt sei, wie in Figur 1 dargestellt ist. Die Drehachsen bb' und cc' des Kardanrahmens sind zueinander senkrecht und schneiden sich gemeinsam mit der Rotationsachse aa' des Kreisels im Schwerpunkt S . Die Achse aa' ist in Ruhe und sei senkrecht zu bb' und cc' .

Hängt man gemäß Figur 1 eine Masse m an den Kardanrahmen, so dass an die Rotationsachse aa' des Kreisels im Abstand l_1 von der Drehachse bb' eine Kraft $K = m \cdot g$ und damit ein Drehmoment $m \cdot g \cdot l_1$ angreift, so kippt die Achse aa' nicht in Richtung der Kraft, sondern sie weicht senkrecht zu ihr und senkrecht zur Rotationsachse des Kreisels aus:

Der Kreisel präzessiert um die Achse cc' . Seine Präzessionsfrequenz f_p beträgt

$$f_p = \frac{mgl_1}{4\pi^2 f_k \Theta} \quad (1)$$

wobei g die Schwerebeschleunigung, f_k die Rotationsfrequenz des Kreisels und Θ sein Trägheitsmoment in Bezug auf seine Achse aa' bedeuten.

Um das Herumschleudern der Masse m im Abstand l_1 um die Achse cc' zu vermeiden, wurde im Versuchsaufbau eine Hebelanordnung gemäß Figur 2 und Figur 3 gewählt.

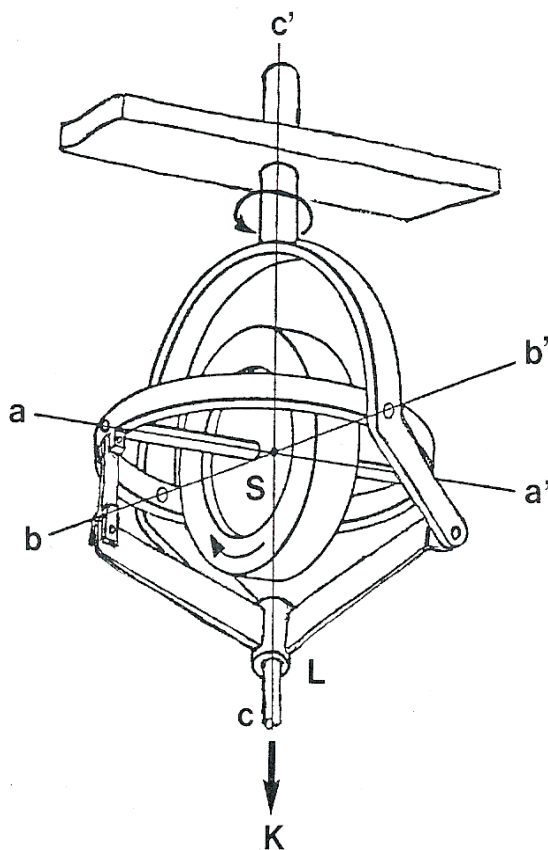


Fig.2: Ortsfeste Einkopplung der Kraft über das Schulterlager L und eine Hebelanordnung

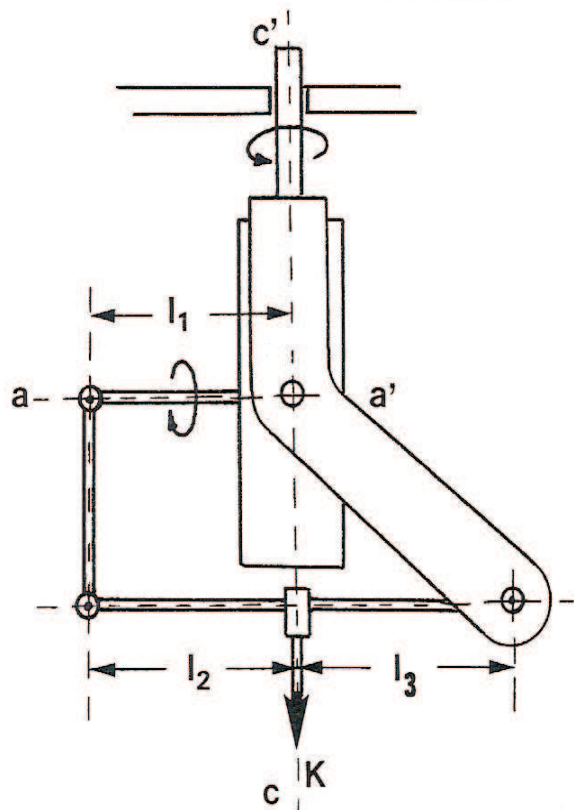


Fig.3: Schematische Seitenansicht des Kreisels und Bezeichnung der Hebel zur Kraftübertragung

An das Schulterlager L ist eine Waagschale angehängt, so dass durch Auflegen verschiedener Gewichte die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Masse sehr bequem gemessen werden kann. Bei der quantitativen

Auswertung sind die Längen der Hebelarme gemäss Figur 3, sowie die wirksame Masse m_0 der Waagschale und der Hebel zu berücksichtigen. Die Arbeitsformel lautet dann:

$$f_p = \frac{l_3}{(l_3 + l_2)} \frac{l_1 g}{4\pi^2 f_k \Theta} (m_0 + m) \quad (2)$$

und ist von der Form der Geradengleichung

$$f_p = Am + B \quad (3)$$

Konstanten:

$$g = (9,815 \pm 0,001) \frac{m}{s^2}; \quad l_1 = l_2 = l_3 = (0,0600 \pm 0,0001)m$$

2 Aufgaben

1. Leiten Sie Gleichung (1) und (2) her.
2. Man bestimme zunächst die Umlauffrequenz f_k des Kreisels mit Hilfe des Stroboskopes.
3. Man nehme die Abhängigkeit der Präzessionsfrequenz f_p von der aufgelegten Masse m zwischen 0 und 10 kg in 1 kg-Schritten auf und stelle den Zusammenhang grafisch dar (DIN A 3, so genau wie nur irgend möglich zeichnen!)
4. Um eine höhere Auswertegenauigkeit zu erreichen, berechne man eine Ausgleichsgerade durch die unter 2. gemessenen Wertepaare nach der berühmten GAUSS'schen "**Methode der kleinsten Quadrate**" (von Carl Friedrich GAUSS 1823 entwickelt).
5. Man berechne mit der unter 3. ermittelten Ausgleichsgeraden für alle aufgelegten Massen 0...10kg die Präzessionsfrequenz $f_{p,ber}$. Um damit die Restabweichung der gemessenen Werte f_p von der Ausgleichsgeraden zu veranschaulichen, bilde man $f_{p,ber} - f_p$, trage diese Differenzen zusätzlich in der obigen Grafik über der Masse auf und verbinde die Punkte zu einem **Polygonzug**.
6. Aus den berechneten Werten für die Geradensteigung und den Achsenabschnitt ermittle man das Trägheitsmoment Θ des Kreisels bzw. die wirksame Masse m_0 der Waagschale und Hebelteile.
7. Man diskutiere ausgiebig die Resultate.

3 Hinweise zur Aufgabenstellung

1. Dieser Versuch ist ein Präzisionsexperiment. Man prüfe aufmerksam, dass man bei allen Messdaten und numerischen Berechnungen stets eine genügende Anzahl von Stellen berücksichtigt!

4 Hinweise zur Versuchsdurchführung

1. Der Kreiselmotor ist ein sogenannter Asynchron-Motor, der mit 50 Hz aus dem Drehstromnetz des Labors betrieben wird. Sein Schlupf beträgt ungefähr 2 % , so dass man mit einer ungefähren Umlauffrequenz von ca. 49 Hz rechnen muss. Um diese Frequenz jedoch möglichst genau zu ermitteln, lasse man den Kreisel zunächst ca. 15 Minuten einlaufen, damit sich eine stabile Betriebstemperatur einstellen kann und damit z.B. die Viskosität des Lageröls konstant wird.

Erst dann beginne man mit der stroboskopischen Messung. Man beachte, dass bei jedem $q = \frac{n}{m}$ mit $n=1,2,3,\dots$ und $m=1,2,3,\dots$ wobei q das Verhältnis von Blitzfolgefrequenz zu Kreiselumlauffrequenz ist, ein stehendes Bild beobachtet wird (wobei unterschiedliche Figuren vorkommen). Um höchste Messgenauigkeit zu erhalten, messe man die höchstmögliche Frequenz, bei der eine stehende Figur erzeugt wird, ermittle das zugehörige q und berechne schließlich die genaue Kreiselumlauffrequenz.

Vorsicht:

Um die sehr empfindliche sogenannte **”schwanke Welle nach LAVAL”** des Kreisels (sie realisiert die Achse aa') nicht zu zerstören, drehe man den Kreisel um die Achse cc' mit der entsprechenden Kurbel **vorsichtig nur im Uhrzeigersinn** aus dem unteren Filzanschlag heraus und niemals so weit, dass er den oberen Filzanschlag berührt.

2. In einer mittleren Stellung zwischen den beiden Filzanschlägen muss die Präzessionsdauer gemessen werden. Die richtige Stellung ist eingestellt, wenn die beiden Pfeilspitzen unter dem Kreiselgehäuse einander gegenüberstehen. Es ist wichtig, dass man während der Zeitmessung eines Umlaufes die Spitzen **ständig genau übereinander** regelt. Es reicht keineswegs, nur im Augenblick des Durchganges durch die Lichtschranke diese Lage einzuhalten. Es ist stark zu empfehlen, die Messungen mit der 10 kg-Belastung zu beginnen, weil man sich hier erfahrungsgemäß am besten trainieren kann. Die Reproduzierbarkeit der Messzeiten sollte hier nicht schlechter als ca. 0,002 s sein. Mit abnehmenden Massen muss man mit schlechteren Werten rechnen. Nachdem man sich eingeübt hat, sollte man für jede Belastung etwa 5 Präzessionsmessungen ausführen.

Bemerkung:

Übrigens stammt der hier benutzte Kreisel aus einem Kreiselkompass für Schiffe, wie er von der Firma ANSCHÜTZ, Kiel, hergestellt wird. Unter Hermann ANSCHÜTZ- KAEMPFE (einem promovierten **Kunsthistoriker!**) wurde dieser Kreisel in der Zeit von etwa 1900-1925 entwickelt. Eine aufgeschnittene Originalkreiselkugel kann im Kieler Schiffahrtsmuseum betrachtet werden.