

Einführung in die komplexe Berechnung von Netzwerken

Unter einem elektrischen Netzwerk versteht man eine Schaltung aus beliebigen elektrischen Bauelementen. Die theoretische Berechnung ist dabei ganz wesentlich von den Eigenschaften dieser Komponenten abhängig. Man teilt sie üblicherweise in vier Gruppen ein (siehe Tab. 1). Als aktive Bauelemente bezeichnet man diejenigen, die elektrische Energie abgeben können (z.B. Batterien). Alle anderen bezeichnet man als passive Bauelemente. Die Unterscheidung nach linear und nichtlinear ergibt sich aus der funktionalen Abhängigkeit zwischen Strom und Spannung an diesem Bauelement. Dieser Zusammenhang wird auch häufig als Kennlinie bezeichnet.

Wir wollen uns hier auf die Gruppe der **passiven linearen Bauelemente** beschränken. Zu ihr gehören Widerstand R , Kondensator C und Spule L .

	linear	nichtlinear
passiv	R, C, L	z.B. Dioden
aktiv	Strom- und Spannungsquellen	z.B. Röhren und Transistoren

Tab. 1: elektrische Bauelemente

Für daraus aufgebaute Netzwerke ist eine theoretische Berechnung mit relativen einfachen Mitteln möglich. Außerdem setzen wir voraus, dass es sich immer um ideale Bauelemente handelt. Auf den Unterschied zu realen Bauelementen und die Darstellung dieser durch Ersatzschaltbilder wird in den Versuchen näher eingegangen.

1 Gleichstromschaltungen

Bei Gleichstrom ist nur die Verwendung von ohmschen Widerständen sinnvoll. Kondensatoren stellen eine Unterbrechung, Spulen einen Kurzschluss dar. Der Zusammenhang zwischen Strom I und Spannung U beim Widerstand R wird durch das Ohmsche Gesetz beschrieben:

$$U = R \cdot I. \quad (1)$$

Die Kennlinie des Widerstands ist eine Gerade mit der Steigung R (siehe Abb. 1).

Schaltet man Widerstände zu einem Netzwerk zusammen, so gelten für die Spannungen und Ströme innerhalb des Netzwerks die Kirchhoffschen Gesetze. In Abb. 2 ist ein Ausschnitt aus einem Netzwerk dargestellt. Der Punkt, an dem mehrere Zweige des Netzwerks zusammentreffen, wird Knoten genannt.

Das erste Kirchhoffsche Gesetz (Knotenregel) beschreibt den Zusammenhang der Ströme an einem Knoten. Wenn man in den Knoten hineinfließende Ströme mit einem anderen Vorzeichen versieht als die herausfließenden, so muss die Summe aller Ströme an diesem Knoten Null ergeben:

$$\sum_{i=1}^k I_i = 0. \quad (2)$$

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz (Maschenregel) beschreibt den Zusammenhang der Spannungen innerhalb einer Masche. Darunter versteht man einen beliebigen geschlossenen Weg durch das Netzwerk.

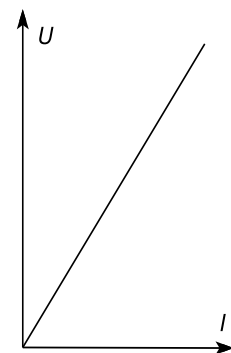


Abb. 1: Kennlinie eines Widerstands

Anfangs- und Endpunkt dieses Weges ist einer der Knoten. Da Spannungen Potentialdifferenzen sind, muss ihre Summe in der Masche Null ergeben:

$$\sum_{i=1}^m U_i = 0. \quad (3)$$

Schreibt man nun für ein gegebenes Netzwerk mit n Widerständen alle Knoten- und Maschengleichungen nach (2) und (3) auf und stellt außerdem die Zusammenhänge zwischen den Spannungen und Strömen für die einzelnen Zweige über das Ohmsche Gesetz (1) her, so erhält man ein **lineares Gleichungssystem**. Die Spannungen und Ströme bilden die Unbekannten dieses Gleichungssystems. Die Anzahl der benötigten Knoten- und Maschengleichungen ergibt sich aus der Bedingung, dass man immer genau so viele Gleichungen wie Unbekannte zur Lösung benötigt. Bei n Widerständen müssen sich also $2n$ Gleichungen ergeben. Die Hälfte davon ergibt sich aus der Anwendung des Ohmschen Gesetzes auf die Widerstände, die andere Hälfte aus den Knoten und Maschen. Dabei ist es wichtig, darauf zu achten, dass nur verschiedene Knoten und Maschen notiert werden, da sonst das Gleichungssystem wegen einer verschwindenden Determinante nicht lösbar ist.

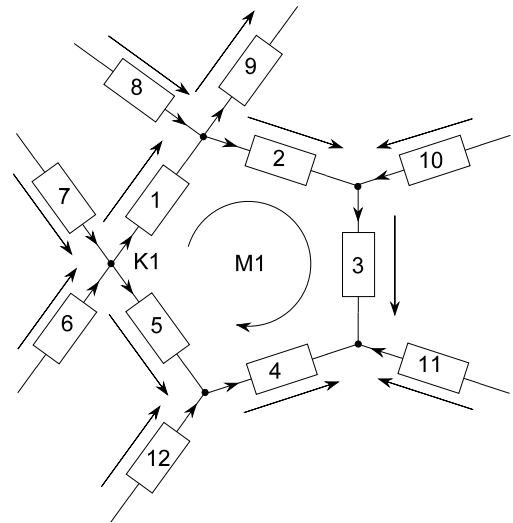


Abb. 2: Ausschnitt aus einem Widerstandsnetzwerk

Generell kann man also festhalten, dass ein **lineares Netzwerk** durch ein immer **lösbares lineares Gleichungssystem** beschrieben wird.

Da die Beachtung der Zählrichtungen der Spannungen und Ströme bei der Aufstellung der benötigten Gleichungen sehr wichtig ist, sollte man nach folgendem Schema verfahren (siehe auch Abb. 2):

1. Alle Widerstände werden mit einer willkürlichen Nummerierung versehen (1,...,n).
2. Für jeden Widerstand wird das Ohmsche Gesetz notiert (n Gleichungen).

Beispiel:

$$U_1 = R_1 \cdot I_1. \quad (4)$$

3. Für jeden Zweig wird eine willkürliche Festlegung der Stromrichtung durch einen Pfeil vorgenommen.
4. An jeden Zweig wird ein Spannungspfeil in der gleichen Richtung wie der zuvor eingetragene Strompfeil eingezeichnet.
5. Für jeden Knoten bis auf einen (dieser ist durch die anderen mitbestimmt) wird die Knotengleichung aufgestellt. Dabei werden in den Knoten fließende Ströme mit einem positiven Vorzeichen, herausfließende Ströme mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Beispiel: (siehe Knoten K1 in Abb. 2)

$$- I_1 - I_5 + I_6 + I_7 = 0. \quad (5)$$

6. Zum Aufstellen der Maschengleichungen gibt man sich zunächst für jede Masche einen willkürlich gewählten Umlaufsinn vor. Alle Spannungen, deren Richtungspfeile in Richtung des Umlaufsinn zeigen, erhalten ein positives Vorzeichen, die anderen ein negatives.

$$U_1 + U_2 + U_3 - U_4 - U_5 = 0. \quad (6)$$

Beispiel: (siehe Masche M1 in Abb. 2):

7. Das Gleichungssystem wird gelöst.

2 Wechselstromschaltungen

Bei Wechselströmen können auch Kondensatoren und Spulen in die Schaltung eingesetzt werden. Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung wird hier durch lineare Differentialgleichungen beschrieben:

$$I = C \cdot \frac{dU}{dt} \quad \text{und} \quad U = L \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (7)$$

Die Kapazität des Kondensators C und die Induktivität der Spule L sind Konstante.

Zur Beschreibung eines Wechselstromnetzwerks müssen also neben den Kirchhoffschen Gesetzen (2) und (3), sowie dem Ohmschen Gesetzes (1) für Widerstände noch die Gleichungen (7) für Kondensatoren und Spulen berücksichtigt werden. Insgesamt ergibt sich daraus ein **lineares Differentialgleichungssystem**. Eine einfache Lösung wie bei der Gleichstromschaltung ist hier also nicht mehr möglich.

Es lassen sich aber grundsätzliche Aussagen über die Form der Lösungsfunktionen machen. Wir wollen dies am Beispiel eines Zweipols erläutern. Einen Zweipol erhält man, wenn man irgendeinen Zweig eines Netzwerks auftrennt und die beiden Trennstellen als Anschlüsse betrachtet (siehe Abb. 3). Legt man jetzt an diese beiden Anschlüsse eine Wechselspannung $U(t)$ an, so wird ein Wechselstrom $I(t)$ fließen, der durch folgende lineare Differentialgleichung beschrieben werden kann:

$$\sum_{i=0}^n a_i I^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i U^{(i)}(t). \quad (8)$$

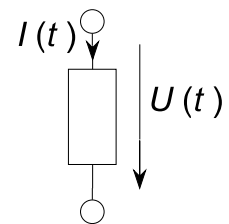


Abb. 3: elektrischer Zweipol

Die konstanten Koeffizienten a_i und b_i berechnen sich aus den Bauelementen des Zweipols. Die Lösung

$$I(t) = I_{\text{hom}}(t) + I_{\text{sp}}(t). \quad (9)$$

einer solchen inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der Lösungsanteil I_{hom} der homogenen Differentialgleichung beschreibt dabei das **Einschwingverhalten**. Dazu gehören z.B. die Ein- und Ausschaltvorgänge. Wegen der im Netzwerk immer vorhandenen Ohmschen Widerstände klingt dieser Lösungsanteil mehr oder weniger schnell mit der Zeit ab. Es bleibt dann nur noch der Anteil I_{sp} übrig, der das **stationäre Verhalten** beschreibt. Dieser Anteil hängt natürlich ganz wesentlich von der anregenden Zeitfunktion $U(t)$ ab.

Wir wollen uns im folgenden auf die Beschreibung des stationären Verhaltens beschränken, da das Einschwingen meist sehr schnell abgeklungen ist. Näher wird auf solche Einschwingvorgänge (z.B. Auf- und Entladen eines Kondensators) in dem Versuch 3.2 (RC-Kombination und Schwingkreis) eingegangen.

3 Sinusförmige Wechselspannungen

In der Praxis der Messtechnik haben die sinusförmigen Signale eine große Bedeutung. Wir wollen uns deshalb zunächst ausschließlich darauf beschränken. Wenn man an einen Kondensator eine sinusförmige

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (10)$$

Spannung anlegt, so berechnet sich der Strom nach (7) zu:

$$I(t) = \omega C U_0 \cos(\omega t + \alpha) = I_0 \sin(\omega t + \beta). \quad (11)$$

Man sieht, dass sich an der zeitlichen Form nichts ändert, d.h. sinusförmige Signale bleiben in linearen

Netzwerken immer sinusförmig. Es ändern sich nur **Amplitude** und **Phase**:

$$I_0 = \omega C U_0 \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Für den Kondensator ergibt sich daraus ein frequenzabhängiger Wechselstromwiderstand $R_C = U_0/I_0 = 1/\omega C$ und eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom von -90° .

Zur Beschreibung der sinusförmigen Signale in linearen Netzwerken würden also Größen genügen, die ausschließlich die Informationen über Amplitude und Phase enthalten. Die zeitliche Abhängigkeit ändert sich nicht. Diese Erkenntnis führt uns zur Definition von **komplexen Größen** zur Beschreibung der Spannungen und Ströme.

4 Definition von komplexen Spannungen und Strömen

Eine komplexe Zahl (im folgenden durch einen Unterstrich gekennzeichnet) wird durch Angabe von Real- und Imaginärteil beschrieben:

$$\underline{z} = a + j b \quad (14)$$

Die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ wird in der Elektrotechnik üblicherweise mit j bezeichnet, um eine Verwechslung mit dem Symbol I für den Strom zu vermeiden. Eine sehr anschauliche Darstellung einer komplexen Zahl erhält man durch Eintragen als Punkt mit den Koordinaten (a, b) in die komplexe Ebene (siehe auch Abb. 4). Verbindet man diesen Punkt mit dem Nullpunkt, so ergibt sich ein die komplexe Zahl \underline{z} beschreibender **Zeiger** (nicht Vektor). Dieser Zeiger wird andererseits aber auch durch Angabe seiner Länge r und seines Drehwinkels φ gegenüber der reellen Achse beschrieben (Polarkoordinaten). Es gelten dabei die Zusammenhänge:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}, \quad (16)$$

bzw.

$$a = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad b = r \sin \varphi. \quad (17)$$

Die zu \underline{z} komplex konjugierte Zahl erhält man durch Spiegelung an der reellen Achse:

$$\underline{z}^* = a - j b \quad (18)$$

Die Größe r in Gl. (14) nennt man auch den Betrag der komplexen Zahl. Die allgemeine Definition für den Betrag ist

$$|\underline{z}| = r = \sqrt{\underline{z} \underline{z}^*} \quad (19)$$

Zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion wird durch die Eulerschen Formeln ein Zusammenhang hergestellt :

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \cos \varphi + j \sin \varphi \\ e^{-j\varphi} &= \cos \varphi - j \sin \varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Damit kann eine komplexe Zahl auch durch ihre Polarkoordinaten dargestellt werden:

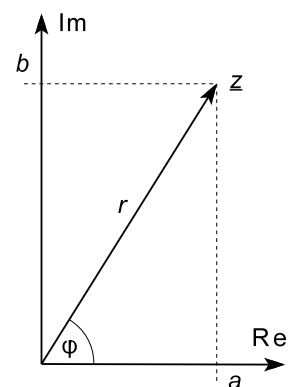


Abb. 4: Komplexe Ebene

$$\underline{z} = r e^{j\varphi}. \quad (21)$$

Aus dieser Beziehung wird ersichtlich, wie sich eine physikalische Größe, die durch Angabe von Amplitude und Phase beschrieben werden muss, durch eine komplexe Größe darstellen lässt. Der Amplitude ordnet man die Zeigerlänge r , dem Phasenwinkel φ den Drehwinkel gegenüber der reellen Achse zu. **Sinusförmige Spannungen und Ströme** (siehe Gl. (10) und (11)) lassen sich damit also durch **komplexe, zeitunabhängige Größen** beschreiben:

$$\underline{U} = U_0 e^{j\alpha} \quad \text{und} \quad \underline{I} = I_0 e^{j\beta}. \quad (22)$$

Mit diesen neu definierten Größen lässt sich nun die Berechnung von linearen Netzwerken bei Wechselspannungen erheblich vereinfachen.

5 Komplexe Berechnung von Netzwerken

Zunächst müssen die Kirchhoffschen Gesetze für die komplexen Größen formuliert werden. Aus den Gl. (18) erhält man für den Sinus durch Subtraktion

$$\sin \varphi = \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}). \quad (23)$$

Mit $\varphi = \omega t + \alpha$ in Gl. (10) für die Spannung $U(t)$, bzw. $\varphi = \omega t + \beta$ in Gl. (11) für den Strom $I(t)$ ergeben sich unter Berücksichtigung von Gl. (20)

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{2j} U_0 (e^{j(\omega t + \alpha)} - e^{-j(\omega t + \alpha)}) = \frac{1}{2j} (\underline{U} e^{j\omega t} - \underline{U}^* e^{-j\omega t}), \\ I(t) &= \frac{1}{2j} I_0 (e^{j(\omega t + \beta)} - e^{-j(\omega t + \beta)}) = \frac{1}{2j} (\underline{I} e^{j\omega t} - \underline{I}^* e^{-j\omega t}). \end{aligned} \quad (26)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke für die Spannungen, bzw. Ströme in die Kirchhoffschen Gleichungen (2), bzw. (3) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2j} U_{0,i} e^{j\alpha_i} e^{j\omega t} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2j} U_{0,i} e^{-j\alpha_i} e^{-j\omega t} &= 0, \\ \sum_{i=1}^k \frac{1}{2j} I_{0,i} e^{j\beta_i} e^{j\omega t} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2j} I_{0,i} e^{-j\beta_i} e^{-j\omega t} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

In diesen Ausdrücken müssen die Koeffizienten vor $e^{j\omega t}$ und $e^{-j\omega t}$ jeweils Null ergeben, so dass sich daraus die Formulierungen der Kirchhoffschen Gesetze für die komplexen Größen ergeben:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \underline{U}_i &= \sum_{i=1}^m U_{0,i} e^{j\alpha_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^k \underline{I}_i &= \sum_{i=1}^k I_{0,i} e^{j\beta_i} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Ein entsprechender Zusammenhang gilt auch für die komplex konjugierten Größen.

Genauso lässt sich auch das Ohmsche Gesetz für die komplexen Größen formulieren und durch geeignete Zuordnung von komplexen Widerständen auch für Kondensatoren und Spulen anwenden. Wir wollen die Ableitung am Beispiel des Kondensators nachvollziehen. Dazu setzen wir die Spannung $U(t)$ nach Gl. (22) in die Gl. (7a) ein. Der Strom berechnet sich dann zu

$$I(t) = \frac{1}{2j} (\mathbf{j}\omega C \underline{U} e^{j\omega t} + \mathbf{j}\omega C \underline{U}^* e^{-j\omega t}) \quad (31)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit $I(t)$ in Gl. (22) ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den komplexen Größen für Spannung und Strom:

$$\underline{I} = \mathbf{j}\omega C \underline{U}. \quad (32)$$

Dies entspricht dem Ohmschen Gesetz, wenn man dem Kondensator einen komplexen Widerstand

$$\underline{R}_C = \frac{1}{\mathbf{j}\omega C} \quad (33)$$

zuordnet. Eine ähnliche Überlegung führt zu dem komplexen Widerstand der Spule:

$$\underline{R}_L = \mathbf{j}\omega L. \quad (34)$$

Damit sind nun alle Voraussetzungen geschaffen, um lineare Netzwerke komplex zu berechnen. Da die Zusammenhänge zwischen den so definierten komplexen Größen (Spannung, Strom und Widerstand) genauso aussehen wie die Zusammenhänge zwischen den reellen Größen bei Gleichstromschaltungen (siehe Kap. 1), können Wechselstromnetzwerke unter den genannten Voraussetzungen also auch durch **lineare Gleichungssysteme** (allerdings im **Komplexen**) beschrieben werden. Es sind keine Differentialgleichungen mehr zu lösen. Alle Methoden der Netzwerkberechnung, wie sie bei Gleichstromschaltungen verwendet werden (z.B. Netzwerktransformationen, Spannungsteiler und Brückenschaltungen), lassen sich somit direkt auf Wechselstromnetzwerke übertragen. Es müssen nur jeweils die entsprechenden komplexen Größen eingesetzt werden.

6 Zweipole

Eine einfache Anwendung findet die komplexe Darstellung bei der Beschreibung von linearen Zweipolen (siehe auch Abb. 3). Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung wird durch das Ohmsche Gesetz für die komplexen Größen beschrieben:

$$\underline{U} = \underline{R} \underline{I}. \quad (35)$$

Setzt man hier für die komplexe Spannung und den komplexen Strom die Definitionen nach Gl.(20) ein und löst nach \underline{R} auf, so erhält man

$$\underline{R} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_0}{I_0} e^{j(\alpha-\beta)} = R_s e^{j\varphi}. \quad (36)$$

Die Größe R_s ist der Betrag des komplexen Widerstands und heißt auch **Scheinwiderstand**. Er berechnet sich als Quotient der Amplituden von Spannung und Strom. φ ist die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Zur vollständigen Beschreibung eines Zweipols genügt es also, seinen komplexen Widerstand anzugeben.

Da die komplexen Widerstände von Spule und Kondensator frequenzabhängig sind, wird der komplexe Widerstand eines Zweipols sich auch mit ω ändern. Diese Abhängigkeit lässt sich sehr anschaulich in einem Diagramm darstellen. Üblicherweise werden dazu zwei verschiedene Darstellungsformen verwendet:

Ortskurve und **Bodediagramm**.

Die Ortskurve ist eine Darstellung des komplexen Widerstands in der komplexen Ebene mit der Frequenz

als Parameter. Das Bodediagramm stellt in zwei Teildiagrammen die Abhängigkeiten von Scheinwiderstand und Phasenverschiebung von der Frequenz dar. Dabei werden in der Regel für die Frequenz und den Scheinwiderstand logarithmische Maßstäbe verwendet. In den nachfolgenden Beispielen soll dies weiter verdeutlicht werden.

6.1 Serienschwingkreis

Einen Serienschwingkreis erhält man durch Reihenschaltung von R, L und C (siehe Abb. 5). Der komplexe Widerstand berechnet sich als Summe der drei Einzelwiderstände:

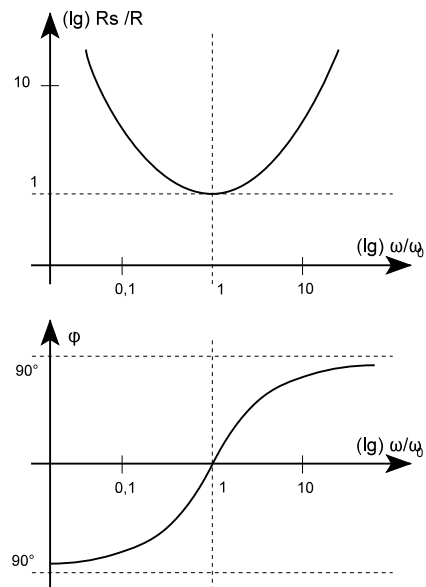
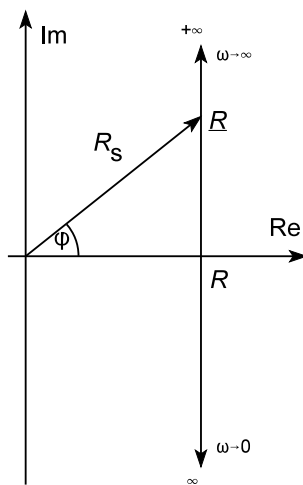
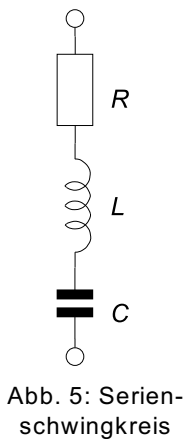
$$\underline{R} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{37}$$

Man erkennt sofort, dass für die Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ der Imaginärteil verschwindet. Diese Frequenz nennt man die Resonanzfrequenz des Schwingkreises. Für Scheinwiderstand und Phasenverschiebung ergeben sich:

$$R_s = |\underline{R}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{und} \tag{39}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im}(\underline{R})}{\text{Re}(\underline{R})} = \arctan \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Die Frequenzabhängigkeiten dieser Größen sind in der Ortskurve nach Abb. 6, bzw. dem Bodediagramm nach Abb.7 dargestellt. Im Bodediagramm werden für Frequenz und Scheinwiderstand logarithmische Maßstäbe verwendet. Zu beachten ist, dass die Achsenbeschriftung üblicherweise mit den Zahlenwerten der Frequenz, bzw. dem Widerstand oder, wie in Abb. 7 mit normierten Werten erfolgt (nicht mit den Logarithmen dieser Werte). Man sieht, dass bei der Resonanzfrequenz die Phasenverschiebung 0 wird und der Scheinwiderstand ein Minimum annimmt.



6.2 Parallelschwingkreis

Eine Parallelschaltung von R , L und C ergibt einen Parallelschwingkreis (Abb. 8). Sein komplexer Leitwert (der Kehrwert des Widerstands) berechnet sich als Summe der Einzelleitwerte

$$\frac{1}{\underline{R}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C. \quad (40)$$

Daraus erhält man für den komplexen Widerstand

$$\underline{R} = \frac{R}{1 + jR(\omega C - 1/\omega L)}. \quad (41)$$

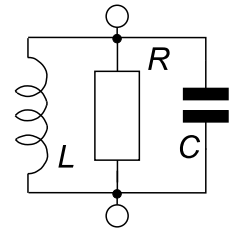


Abb. 8: Parallelschwingkreis

Hierbei wurde angenommen, dass es sich jeweils um ideale Bauelemente handelt. In der Praxis hat man es dagegen immer mit realen Bauelementen zu tun, deren Eigenschaften sich von denen der idealen unterscheiden. Bei der Spule muss zum Beispiel der ohmsche Widerstand der Wicklung berücksichtigt werden. Eine reale Spule ist deshalb durch die Reihenschaltung einer idealen Spule mit einem Widerstand zu beschreiben (siehe auch die Versuche 3.1 und 3.3). Diese Darstellung nennt man dann ein **Ersatzschaltbild**.

Für einen Parallelschwingkreis mit idealen Bauelementen erhält man für den Scheinwiderstand und die Phasenverschiebung

$$R_s = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2(\omega C - 1/\omega L)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = -\arctan R(\omega C - 1/\omega L). \quad (42)$$

Die Resonanzfrequenz berechnet sich wie beim Serienschwingkreis.

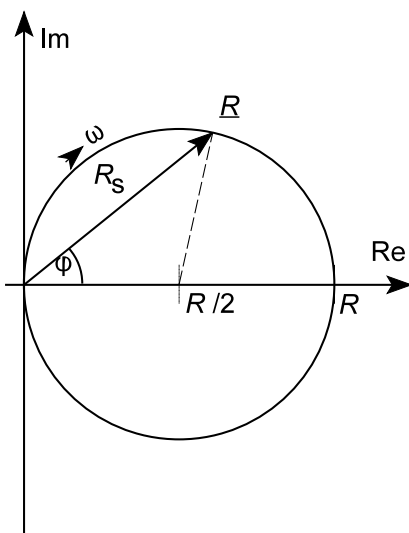


Abb. 9: Ortskurve

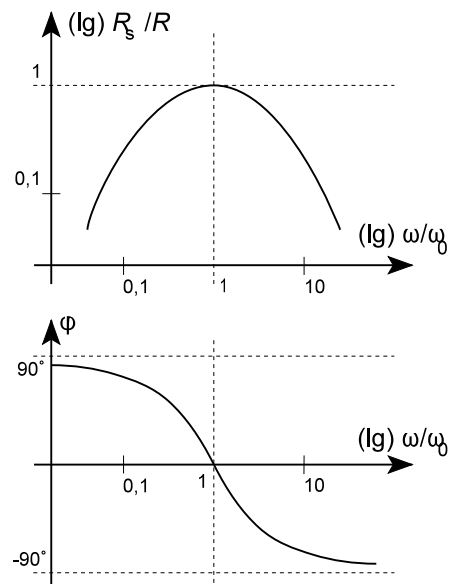


Abb. 10: Bodediagramm

Für die Ortskurve ergibt sich ein Kreis mit dem Radius $R/2$ um den Punkt $R/2$ auf der reellen Achse (Abb. 9). Dies lässt sich leicht aus dem von den Zeigern gebildeten Dreieck zwischen Nullpunkt, Punkt auf der Ortskurve und Punkt bei $R/2$ auf der reellen Achse ableiten. Die Länge des Zeigers von $R/2$ nach R berechnet sich zu

$$\left| \frac{R}{2} - \frac{R}{2} \right| = \left| \frac{R}{1 + jR(\omega C - 1/\omega L)} - \frac{R}{2} \right| = \frac{R}{2} \left| \frac{1 - jR(\omega C - 1/\omega L)}{1 + jR(\omega C - 1/\omega L)} \right| = \frac{R}{2}. \quad (43)$$

Sie ist von ω unabhängig. Damit ist die Ortskurve ein Kreis.

Das Bodediagramm ist in Abb. 10 dargestellt. Bei der Resonanzfrequenz nimmt hier der Scheinwiderstand ein Maximum an.

7 Vierpole

Als Vierpol bezeichnet man ein Netzwerk aus linearen Bauelementen mit vier äußeren Anschlüssen (siehe Abb.11). Das linke Klemmenpaar wird üblicherweise als Eingang, das rechte als Ausgang bezeichnet. Sowohl am Eingang als auch am Ausgang können jeweils eine Spannung und ein Strom gemessen werden. Gibt man zwei dieser vier Größen vor, so lassen sich die beiden anderen aus den Eigenschaften des Vierpols bestimmen. Der Zusammenhang ist als lineares Gleichungssystem darstellbar (siehe auch Versuch 3.6, Vierpole). Je nachdem, welche beiden der vier Größen vorgegeben werden, gibt es sechs verschiedene Darstellungsformen. Häufig benutzt wird die Kettenform



Abb. 11: Vierpol

Der Zusammenhang ist als lineares Gleichungssystem darstellbar (siehe auch Versuch 3.6, Vierpole). Je nachdem, welche beiden der vier Größen vorgegeben werden, gibt es sechs verschiedene Darstellungsformen. Häufig benutzt wird die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_e \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Eine bei Vierpolen wichtige Größe ist der Kehrwert von a_{11} . Man nennt ihn auch das Leerlaufspannungsübertragungsverhalten A . Bei Wechselstromvierpolen ist dies eine komplexe Größe und eine Funktion der Frequenz ω .

7.1 Wien-Brücke

Als Beispiel für einen Vierpol soll die Schaltung nach Abb. 12 dienen. Sie ist aus zwei jeweils gleichen Widerständen und Kondensatoren aufgebaut und unter dem Namen „Wien-Brücke“ bekannt. Fasst man die Serienschaltung und die Parallelschaltungen von R und C jeweils zu komplexen Widerständen zusammen, erhält man das Ersatzschaltbild nach Abb. 13. Es stellt einen Spannungsteiler dar. Für seine beiden komplexen Widerstände \underline{R}_1 und \underline{R}_2 ergeben sich

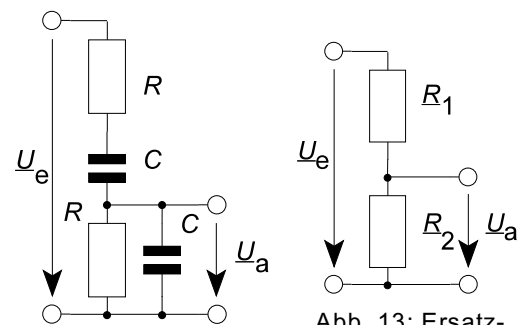


Abb. 12: Wien-Brücke

Abb. 13: Ersatzschaltbild

$$\underline{R}_1 = R + \frac{1}{j\omega C} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\underline{R}_2} = \frac{1}{R} + j\omega C. \quad (45)$$

Die Ausgangsspannung \underline{U}_a des Spannungsteilers berechnet sich zu

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{R}_2}{\underline{R}_1 + \underline{R}_2} \underline{U}_e = \frac{1}{1 + \underline{R}_1/\underline{R}_2} \underline{U}_e. \quad (46)$$

Damit erhält man für das komplexe Übertragungsverhalten der Wien-Brücke

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + \underline{R}_1/\underline{R}_2} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} = \frac{1}{3 + j\left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC}\right)}. \quad (47)$$

Dieser Ausdruck sieht dem des komplexen Widerstand des Parallelschwingkreises sehr ähnlich. Die Ortskurve ist auch hier ein Kreis. Die Ausgangsspannung nimmt bei der Frequenz $\omega_0 = 1/RC$ ein Maximum an. Sie beträgt hier genau 1/3 der Eingangsspannung. Die Phasenverschiebung ist bei dieser Frequenz 0.

Die Wien-Brücke lässt sich also ähnlich wie ein Parallelschwingkreis zur Frequenzselektion benutzen. Ihr Vorteil ist, dass man für ihren Aufbau keine Spule benötigt. Sie wird deshalb in der Praxis in Geräten zur Erzeugung von sinusförmigen Spannungen mit veränderlicher Frequenz (RC-Generatoren) häufig benutzt.

7.2 Tiefpass 2. Ordnung

Als weiteres Beispiel für einen Vierpol soll die Schaltung nach Abb. 14 dienen. Sie stellt einen frequenzabhängigen Spannungsteiler dar. Da hohe Frequenzen stärker geschwächt werden als tiefe nennt man diese elektrische Filterschaltung auch „Tiefpass“.

Zur Ableitung des Übertragungsverhaltens setzen wir für

$$\underline{R}_1 = R + j\omega L \quad \text{und} \quad \frac{1}{\underline{R}_2} = j\omega C \quad (49)$$

in die oben bereits benutzte Formel (39) für den Spannungsteiler ein:

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + \underline{R}_1/\underline{R}_2} = \frac{1}{1 + (R + j\omega L)j\omega C} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}. \quad (50)$$

Da die Frequenz im Nenner quadratisch auftritt, nennt man diese Schaltung einen Tiefpass 2. Ordnung. Der Amplitudenabfall ist bei hohen Frequenzen im logarithmischen Maßstab doppelt so steil wie bei einem Tiefpass 1. Ordnung (einfaches RC-Glied, siehe auch Versuch 3.5).

Ein weiterer Unterschied fällt bei der Dimensionierung der Schaltung auf. Bei einem Filter 1. Ordnung kann man durch

Wahl von R und C nur die Grenzfrequenz, d.h. die Frequenz, bei der die Amplitude auf den $1/\sqrt{2}$ -ten Teil, des Maximalwertes abgefallen ist, einstellen:

$$\omega_g = \frac{1}{RC}. \quad (52)$$

Da das Filter 2. Ordnung aus drei Bauelementen aufgebaut ist, gibt es einen weiteren Parameter, mit dem das Verhalten der Schaltung beeinflusst werden kann. Wir wollen folgende Umbenennungen einführen:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{R}{2L}. \quad (53)$$

ω_0 ist die Resonanzfrequenz eines Schwingkreises aus L und C , ρ die durch den Widerstand R hervorgerufene Dämpfung. Setzen wir diese Größen in Gl. (42) ein, so erhalten wir

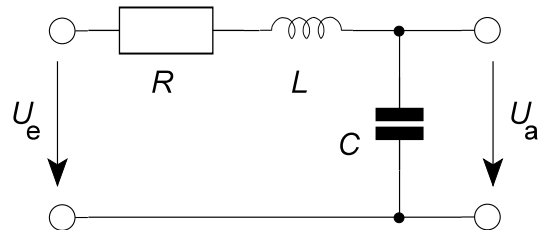


Abb. 14: Tiefpass 2. Ordnung

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j 2\rho\omega}. \quad (54)$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch Normieren auf die Resonanzfrequenz noch übersichtlicher gestalten. Wir führen dazu folgende Größen ein:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{und} \quad D = \frac{2\rho}{\omega_0}. \quad (55)$$

Für das komplexe Übertragungsverhalten ergibt sich damit der einfache Ausdruck:

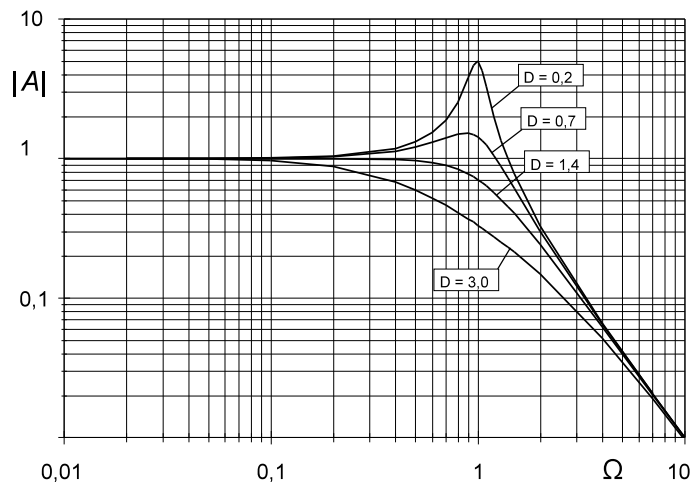


Abb. 15: Frequenzgang beim Tiefpass 2.Ordnung

$$\underline{A}(\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j D\Omega}. \quad (56)$$

Daraus erhalten wir den Amplituden- und den Phasenfrequenzgang:

$$|A(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + D^2\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega^4 + (D^2 - 2)\Omega^2 + 1}} \quad (57)$$

$$\varphi(\Omega) = \arctan \frac{-D\Omega}{1 - \Omega^2}. \quad (58)$$

Der Einfluss der Dämpfung D auf den Amplitudenfrequenzgang ist in Abb. 15 dargestellt. Bei kleinen Werten von D erkennt man eine deutliche Amplitudenerhöhung im Bereich um die Resonanzfrequenz des aus L und C gebildeten Schwingkreises. In diesem Fall wird der Nenner von Gl. (48) kleiner als 1.

Durch geeignete Wahl der Dämpfung lässt sich diese Resonanz völlig unterdrücken. Der optimale Fall ergibt sich, wenn in Gl. (48) die Klammer im Nenner verschwindet, d.h. $D = \sqrt{2} \approx 1,4$ wird. Man erhält dann

$$|A(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\Omega^4 + 1}}. \quad (60)$$

7.3 Vergleich zu mechanischen Systemen

Der Einsatz der komplexen Berechnung muss nicht auf elektrische Netzwerke beschränkt bleiben, sondern kann auf alle physikalischen Systeme, die sich durch lineare Differentialgleichungen (siehe Gl. (8)) beschreiben lassen, angewandt werden. Im folgenden soll ein Beispiel aus der Mechanik behandelt werden, dessen komplexe Beschreibung identisch ist mit dem Tiefpass aus 7.2. Es handelt sich um ein Feder-Masse-System (Abb. 16), dessen Bewegungsgleichung sich aus dem zweiten Newtonschen Axiom ergibt:

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - kx(t) - r\dot{x}(t) \quad (61)$$

Der anregenden Kraft $F(t)$ sind die zur Auslenkung proportionale Rückstellkraft der Feder (siehe Hookesches Gesetz) und die geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft entgegen gerichtet. Es sind dabei $x(t)$ die Auslenkung der Masse m , k die Federkonstante und r die Reibungskonstante. Mit den Abkürzungen

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \rho = \frac{r}{2m} \quad \text{und} \quad f(t) = \frac{F(t)}{m\omega_0^2} \quad (62)$$

lässt sich Gl. (51) umformen:

$$\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \omega_0^2f(t). \quad (63)$$

Diese Differentialgleichung ist identisch mit der, den Tiefpass (Abb. 12) beschreibenden:

$$\ddot{U}_a(t) + 2\rho\dot{U}_a(t) + \omega_0^2U_a(t) = \omega_0^2U_e. \quad (64)$$

Dabei wurden die Abkürzungen nach Gl. (53) verwendet.

Auf diese Weise lassen sich elektrische Ersatzschaltbilder zu mechanischen Systemen konstruieren. Durch Vergleich der Gl. (53) und (62) erkennt man die Analogien: Die Spule entspricht der Masse, der Kondensator der Feder (mit dem Kehrwert der Kapazität) und der Widerstand der Reibung. Die oben gemachten Überlegungen zum dynamischen Verhalten bei sinusförmiger Anregung (Gl. 60) lassen sich somit auf das mechanische System direkt übertragen. Auch hier ist die geeignete Wahl einer Dämpfung unbedingt notwendig, um mechanische Resonanzen zu unterdrücken.

In der Praxis wird dieses Verfahren häufig, insbesondere bei elektromechanischen Systemen (wie z.B. Lautsprecher) angewandt, um ihr Verhalten theoretisch besser verstehen zu können.