Physikalisches Praktikum für Anfänger - Teil 2
Gruppe 1 - Mechanik

1.3 Reversionspendel

Stichwörter: *Rücktreibende Kraft, physikalisches Pendel, mathematisches Pendel, Trägheitsmoment, Drehmoment, Schwingung, Schwingungsdauer, Reduzierte Pendellänge, Erdbeschleunigung.*

1 Einführung

Die harmonische Drehschwingung ist eine in der Technik und in der Natur häufig vorkommende Art der Bewegung. Zu ihrer mathematischen Formulierung gelangt man durch Gleichsetzen des sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung ergebenden Drehmoments mit einem - beispielsweise durch eine Spiralfeder realisierten - rücktreibenden Richtmoment. Die hieraus resultierende Differentialgleichung besitzt dann fur kleine Winkel φ eine Losung der Form

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot sin(\omega t) \tag{1}$$

die die Bewegung einer harmonischen Drehschwingung beschreibt.

Eine sehr einfache Möglichkeit zur Realisierung eines rücktreibenden Momentes besteht in der Ausnutzung der Schwerkraft. So stellen alle an einem Punkt oberhalb des Schwerpunktes im Schwerefeld der Erde drehbar aufgehängten Körper ein Pendel dar, das bei entsprechendem Anstoß eine harmonische Drehschwingung ausführt. Eine idealisierte Form eines solchen Pendels ist das mathematische oder Fadenpendel. Es besteht aus einer punktförmig angenommenen Masse m, die an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängt ist (siehe Abb. 1). Hierfür ergibt der Ansatz über die Drehmomente die Differentialgleichung:

$$ml^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m \cdot l \cdot g \cdot sin\varphi_0 \tag{2}$$

in der sich unter der Annahme kleiner Drehwinkel $sin\varphi$. φ setzen lässt. Das führt dann zu der in (1) dargestellten harmonischen Drehschwingung. Dabei gilt:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} bzw. T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3}$$

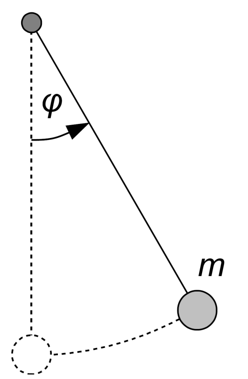

Abbildung 1: Mathematisches Pendel

Mit Hilfe von (3) lässt sich somit aus der Schwingungsdauer T des Pendels relativ einfach die Erdbeschleunigung g bestimmen. In der Praxis erweist es sich jedoch als schwierig, die Fadenlänge l genau zu ermitteln.

Eine genauere Bestimmung der Erdbeschleunigung kann mit einer besonderen Ausführung eines physikalischen Pendels, dem so genannten Reversionspendel, durchgeführt werden. Für ein physikalisches Pendel in Form eines im Punkt A aufgehängten homogenen Stabes (siehe Abb. 2) ergibt sich unter den gleichen Annahmen wie oben für die Schwingungsdauer T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot a}} \tag{4}$$

Hierin ist a der Abstand zwischen A und dem Schwerpunkt S und J das Trägheitsmoment des Stabes. Das Trägheitsmoment J für eine Drehung um den Punkt A berechnet sich nach dem Steinerschen Satz zu

$$J = J_S + m \cdot a^2 \tag{5}$$

wobei J_S das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment darstellt. Somit erhält man für die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_S + m \cdot a^2}{m \cdot g \cdot a}} \tag{6}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (3), so ist ersichtlich, dass bezüglich der Schwingungsdauer das physikalische Pendel einem mathematischen Pendel mit der Fadenlänge

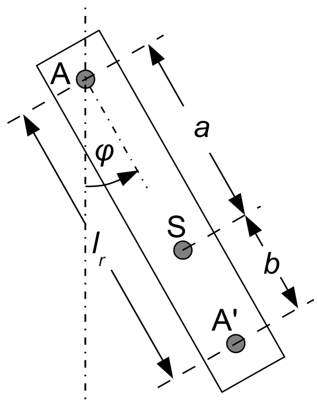

Abbildung 2: Physikalisches Pendel

$$l_r = \frac{J_S + m \cdot a^2}{m \cdot a} \tag{7}$$

entspricht. Daher wird diese Länge l_r auch reduzierte Pendellänge genannt. Der Punkt A', der auf der Verlängerung von AS im Abstand l_r von A - bzw. b von S - liegt, heißt Schwingungsmittelpunkt. Lässt man den Stab um den Punkt A' schwingen, so erhält man für die Periodendauer entsprechend Gl.(6):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_S + m \cdot b^2}{m \cdot g \cdot b}} \tag{8}$$

Unter Benutzung der Definition für die reduzierte Pendellänge lässt sich nun zeigen, dass das Pendel um beide Aufhängepunkte gleichschnell schwingt, und man erhält mit $a + b = l_r$:

$$T_{S_1} = T_{S_2} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \tag{9}$$

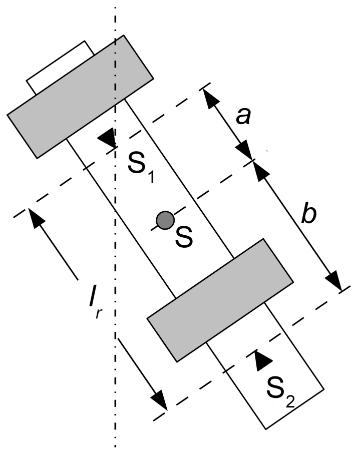

Abbildung 3: Reversionspendel

Diese Eigenschaft nutzt man bei dem Reversionspendel aus. Hier sind die Aufhängepunkte A und A' als scharfe Schneiden S_1 und S_2 ausgebildet, deren Abstand l_r sich sehr genau messen lässt (Abb. 3). Auf der Pendelstange sind zwei verschiebbare Massen angebracht. Durch Variation der Abstände dieser Massen lässt sich nun eine Einstellung finden, bei der die Schwingungsdauern um beide Schneiden S_1 und S_2 genau gleich sind, so dass man dann durch Messung der Schwingungsdauer nach (9) die Erdbeschleunigung sehr genau bestimmen kannn.

2 Versuchsdurchführung

Zur Messung der Schwingungsdauer steht eine durch eine Lichtschranke gesteuerte sehr genaue digitale Stoppuhr zur Verfügung. Die Präzision der Anordnung ist so hoch, dass man eine Veränderung der Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude feststellen kann. Führen Sie deshalb den Versuch mit stets gleicher Anfangsauslenkung des Pendels durch.

Aufgaben:

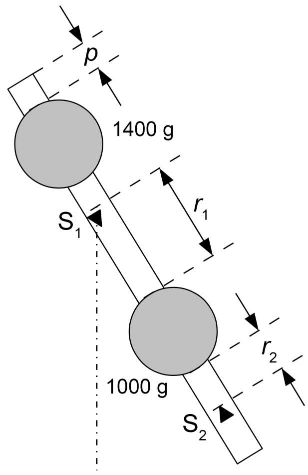

Abbildung 4: Aufbau des Reversionspendels im Versuch

1. Bestimmen Sie die Schwingungsdauern T_{S_i} $(i = 1,2)$ um die Schneiden $\mathrm{S_i}$ in Abhängigkeit der Abstände r_i zwischen den Schneiden $\mathrm{S_i}$ und der 1000g-Masse. r_i wird dabei in Schritten von 10 cm verändert. Der Abstand p zwischen Pendelende und 1400g- Masse wird dabei zu p = 15 cm gewählt (siehe auch Abb. 4).

2. In einer grafischen Darstellung wird T_{S_i} gegen r_i aufgetragen. Dab*eischneiden* sich die zwei zueinander gehörenden parabelartigen Kurven in zwei Punkten ($T_{S_1} = T_{S_2}$).

3. Zur genaueren Bestimmung der zu den Schnittpunkten gehörenden Schwingungsdauer ist die Umgebung eines der beiden Schnittpunkte noch einmal auszumessen, wobei r_1 in Schritten von 1 cm variiert wird. In einer grafischen Darstellung mit vergrößertem Masstab ist unter der Annahme eines näherungsweise linearen Verlaufes der Kurven in der Umgebung des Schnittpunkts dieser genau zu bestimmen.

4. Berechnen Sie aus der sich so ergebenden Schwingungsdauer T die Erdbeschleunigung g.

5. Führen Sie eine Fehlerrechnung durch. Benutzen Sie dabei für die Definition der Zeitunsicherheit Δt ein statistisches Verfahren. Überlegen Sie, inwieweit die Unsicherheit in der Bestimmung des Abständes r_i in die Fehlerbetrachtung mit eingeht! Bestimmen Sie grafisch aus den Unsicherheiten fur die Schwingungsdauern $T(r_i)$ die resultierende Unsicherheit der Schwingungsdauer T im Schnittpunkt. Hieraus ergibt sich dann der Fehler für den Wert g der Erdbeschleunigung. Könnte man die Ortsunsicherheit Δr_i durch geschicktes Vorgehen noch weiter verringern?

Literatur:

Meschede, *Gerthsen Physik*, Kap. 2.4, 25. Auflage (2015).
Tipler, Mosca, *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*, Kap 11.3, 7. Auflage (2015).

2.2019/VdM,Rathlev