Übungen zur Plasmaphysik, Teil I
im Wintersemester 2022/2023
Aufgabenblatt 10
für die Übungsgruppen am Mittwoch, den 18.01.2023

Aufgabe 1
Die Saha-Eggert-Gleichung

$$\frac{n_{\mathrm{Ar}^+}}{n_{\mathrm{Ar}}} = \frac{1}{n_{\mathrm{e}}} \frac{Z_{\mathrm{Ar}^+}(T)}{Z_{\mathrm{Ar}}(T)} \frac{2\,(2\pi\, m_{\mathrm{e}}\, k_{\mathrm{B}} T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \exp\left(-\frac{W_{\mathrm{ion,Ar}^+}}{k_{\mathrm{B}} T}\right)$$

beschreibt das Zahlen- oder Dichteverhältnis der Ar^+-Ionen n_{Ar^+} zu den neutralen Ar-Atomen n_{Ar}. Dabei sind $Z_{\mathrm{Ar}^+}(T)$ und $Z_{\mathrm{Ar}}(T)$ die jeweiligen Zustandssummen (oder Partitionsfunktionen) bei der Temperatur T. Außerdem ist $W_{\mathrm{ion,Ar}^+}$ die Ionisierungsenergie für ein neutrales Ar-Atom.

Im Folgenden soll die Gleichung auf einen Schweißlichtbogen angewendet werden. Dabei brennt ein Lichtbogen in dem Gas zwischen dem abschmelzenden Schweißdraht und dem metallischen Werkstück. Das Gas bestehe nur aus Argon. An einer betrachteten Stelle mit der Elektronendichte $n_{\mathrm{e}} = 2 \times 10^{23}\,\mathrm{m}^{-3}$ betrage die Temperatur $T = 15\,000\,\mathrm{K}$.

Die Ionisierungsenergie beträgt $W_{\mathrm{ion,Ar+}} = 15{,}76\,\mathrm{eV}$, und die Zustandssummen bei 15 000 K seien $Z_{\mathrm{Ar}^+}(T) \approx 5{,}7$ und $Z_{\mathrm{Ar}}(T) \approx 1{,}0$.

(a) Wie hoch ist der Ionisierungsgrad? Was ist der physikalische Grund für den hohen Ionisierungsgrad? (Betrachten Sie den Exponentialfaktor in der Saha-Gleichung!)

(b) Gibt es auch nennenswert viele zweifach geladene Ar^{++}-Ionen?

Hinweis: Die zweite Ionisierungsenergie beträgt $W_{\mathrm{Ar}^{++}} = 27{,}63\,\mathrm{eV}$, und die Zustandssumme für Ar^{++} bei 15 000 K sei $Z_{\mathrm{Ar}^{++}}(T) \approx 10$.

Aufgabe 2
Den Erddynamo kann man sich vereinfacht als Leiterschleife im Erdinneren vorstellen, durch die ein das Magnetfeld erzeugender Strom I fließt. In der Tat enthält die Erde eine gut leitende Region (den geschmolzenen Erdkern) mit einem Radius $R_{\mathrm{S}} = 3500\,\mathrm{km}$. Nehmen Sie diesen Radius als den Radius der Leiterschleife an. Auf der Achse der Leiterschleife ist das Magnetfeld in einer Entfernung z zu ihrer Ebene:

$$B_z = \frac{B_{\mathrm{C}}}{[1 + (z/R_{\mathrm{S}})^2]^{3/2}} \quad .$$

(a) Man berechne aus der an den Polen beobachteten Flussdichte das Magnetfeld B_{C} im Zentrum der Leiterschleife.

(b) Wie groß ist die Stromstärke, die dieses Feld verursacht?

(c) Man ermittle die Energiedichte des irdischen Magnetfeldes an den Polen.

Vergleichen Sie mit typischen Werten für die Energiedichte der Magnetfelder auf der Sonne bzw. im galaktischen Zentrum.

Aufgabe 3
Das Magnetfeld eines Dipols mit magnetischem Moment $\vec{M} = M\vec{e_z}$ wird in kartesischen Koordinaten beschrieben durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{M}) - r^2\vec{M}}{r^5}$$

Nehmen Sie als magnetisches Moment den Wert $M \approx 8 \times 10^{22}\,\mathrm{A\,m^2}$ an und berechnen Sie den Betrag der magnetischen Flussdichte B am magnetischen Äquator am Erdboden und in 200 km Höhe.