

Maxwell-Gleichungen

Faradays Induktionsgesetz:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = - \dot{\Phi}_B$$

$$\dot{B} \rightarrow E, \quad \dot{E} \rightarrow B?$$

James

Clerk
Vater

 |

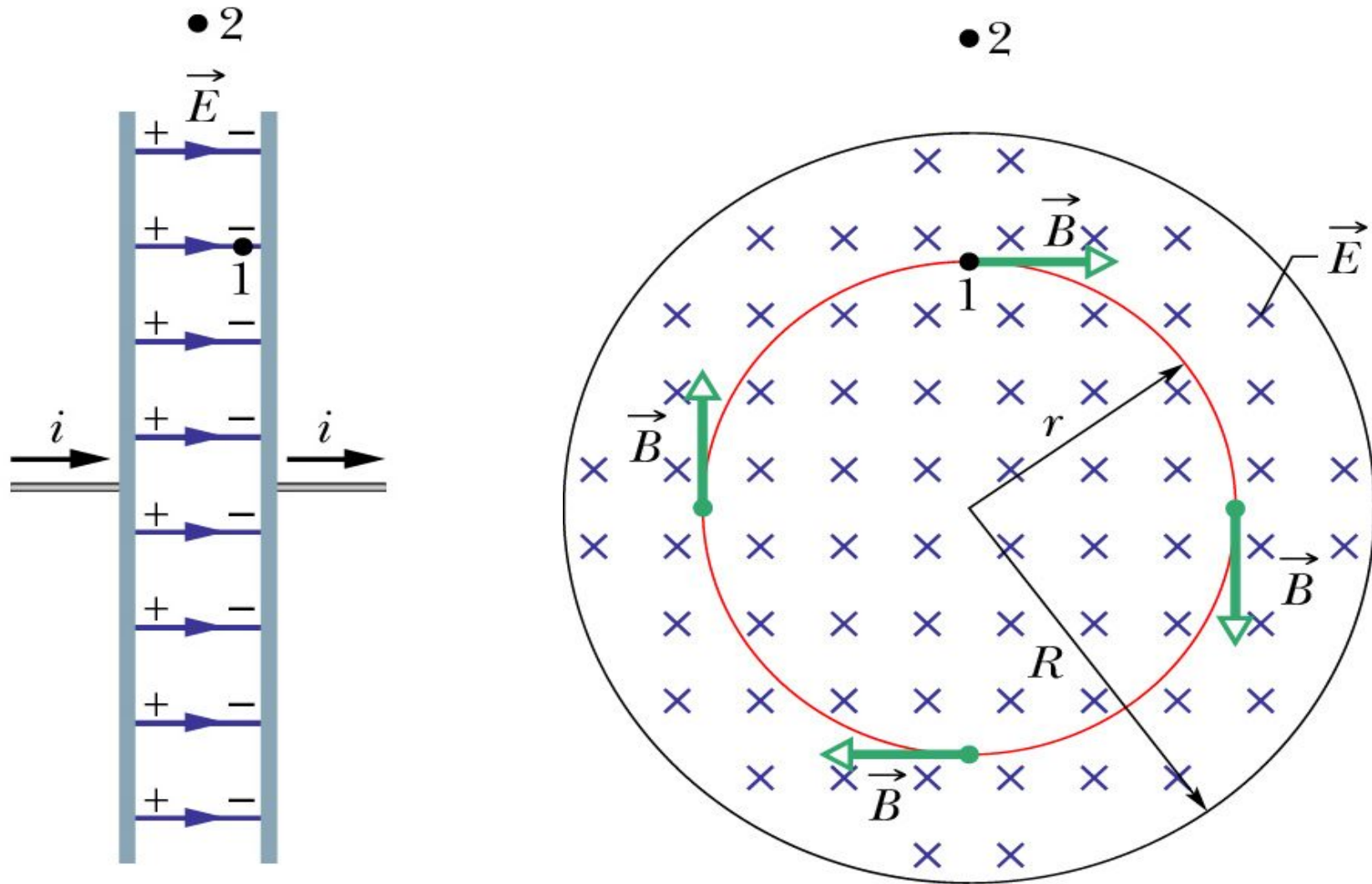
Maxwell
Mutter

Maxwell's Induktionsgesetz:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\Phi}_E$$

Erinnerung an Faradaysches Induktionsgesetz:

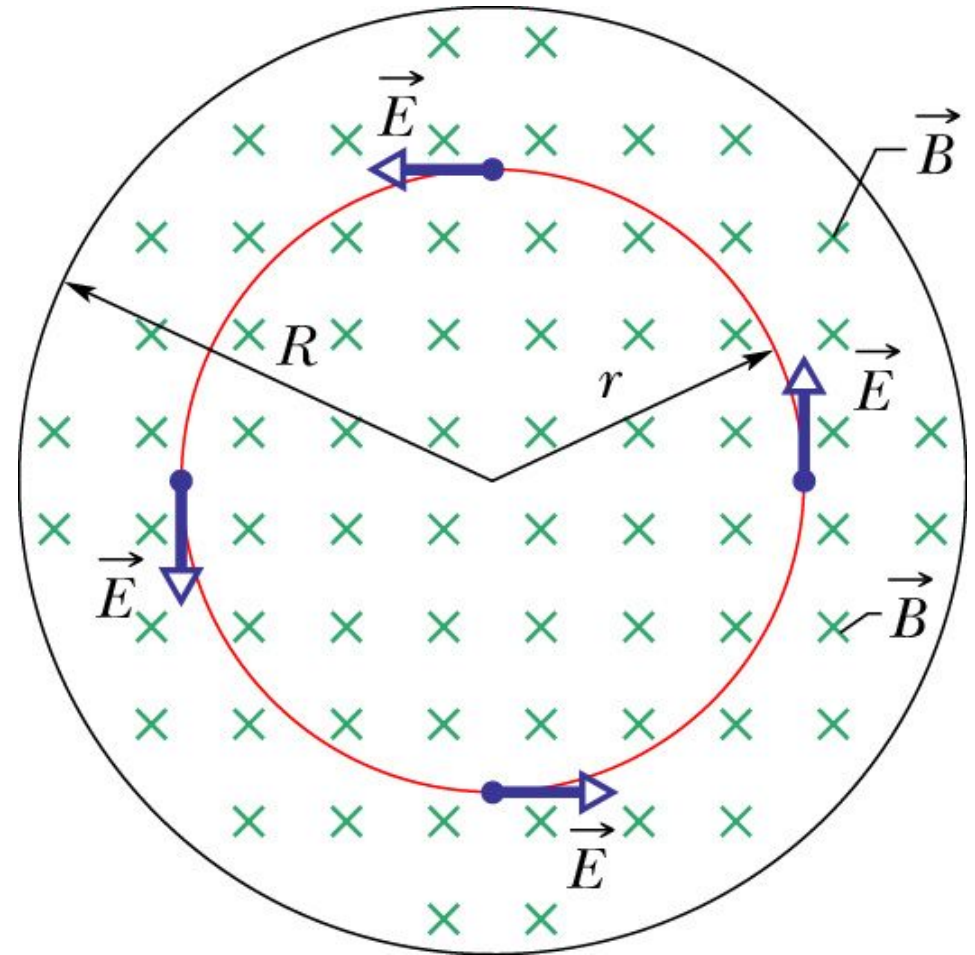
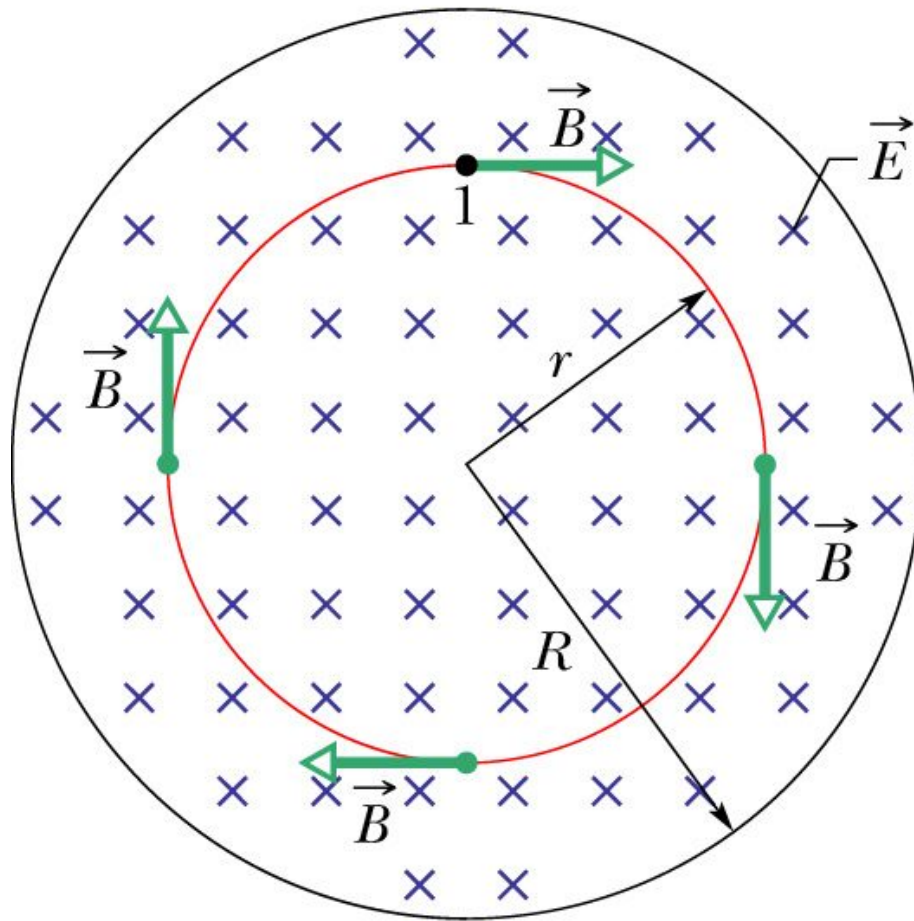
sich ändernder magnetischer Fluss ergibt Zirkulation von $\vec{E}$



Maxwellsches Induktionsgesetz:

sich ändernder elektrischer Fluss ergibt Zirkulation von $\vec{B}$

•2



$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 i \rightarrow \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 i + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \dot{\Phi}_E}_{i_v}$$

(fiktiver) Verschiebungsstrom
 i_v

Plattenkondensator

$$q = \epsilon_0 A E$$

$$\textcircled{1} \dot{q} = i = \epsilon_0 A \dot{E}$$

$$\textcircled{2} i_v = \epsilon_0 \dot{\Phi}_E = \epsilon_0 \frac{d}{dt}(E A) = \epsilon_0 A \dot{E}$$

$$\Rightarrow i = i_v$$

Grundgleichungen des Elektromagnetismus

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

Ladungen = Quellen
des E-Felds

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

geschlossene Feldlinien
keine Quellen des B-Felds

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\dot{\Phi}_B$$

$\dot{\Phi}_B \rightarrow$ Wirbel des E-Felds

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\Phi}_E + \mu_0 i$$

$\dot{\Phi}_E, i \rightarrow$ Wirbel des
B-Felds

(Integralform)

$$\int_A \vec{F} d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (\text{Gauß})$$

$$\int_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

$V \rightarrow 0$
 $V \operatorname{div} \vec{E}$
 qV/ϵ_0

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{diff. Form}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Stokes: $\oint_C \vec{F} d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{F} d\vec{A}$

$C = \text{Rand von } A$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{E} d\vec{A} = - \dot{\Phi}_B = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A}$$

$A \rightarrow 0$

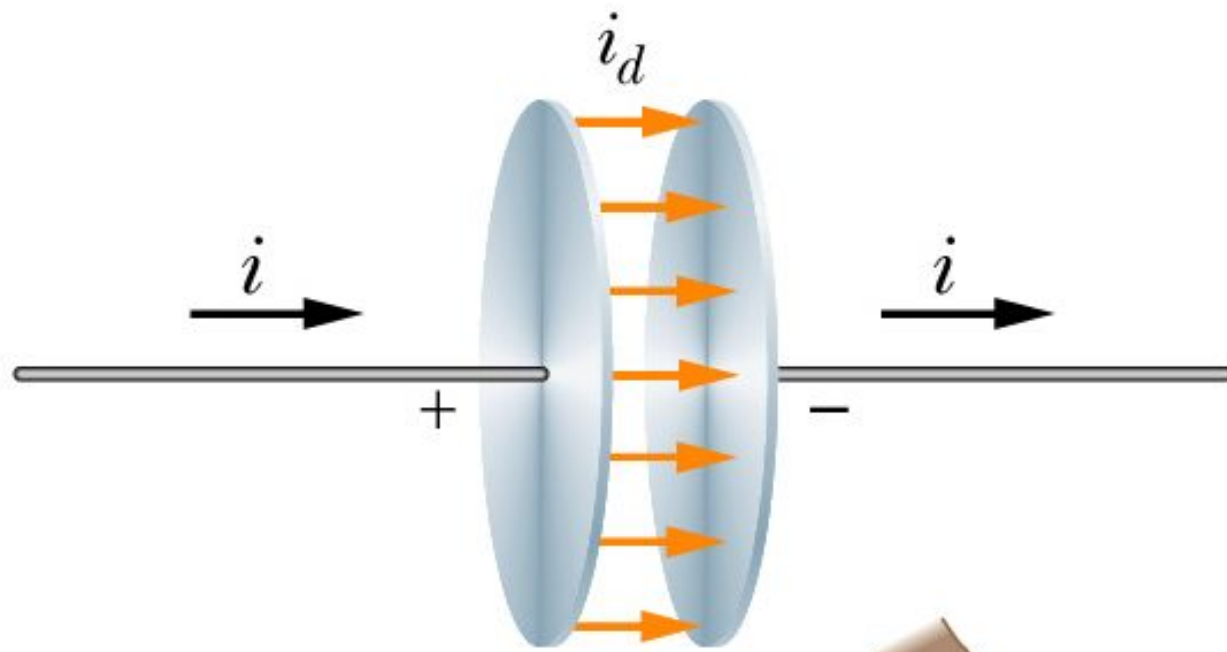
$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = - \dot{\vec{B}}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int \text{rot } \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\Phi}_E + \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A}$$

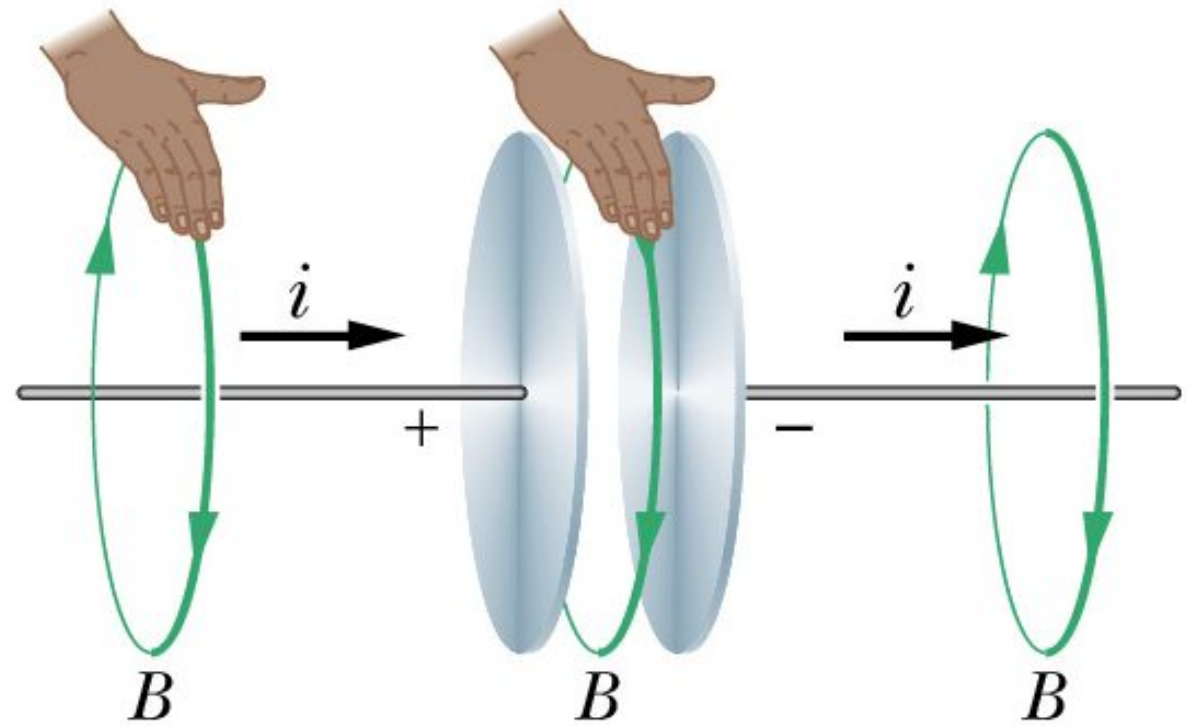
$$= \mu_0 \left(\frac{d}{dt} \int \epsilon_0 \vec{E} d\vec{A} + \int \vec{j} d\vec{A} \right)$$

$A \rightarrow 0$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\epsilon_0 \dot{\vec{E}} + \vec{j})$$



displacement
current



Field due
to current i

Field due
to current i_d

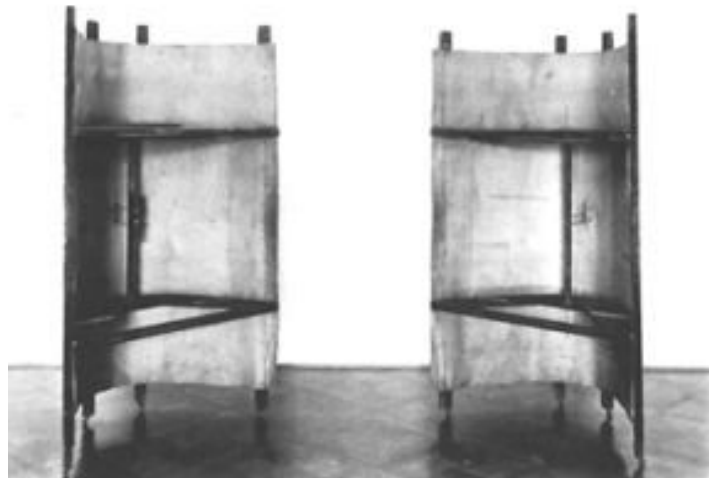
Field due
to current i

EM Wellen



Heinrich Hertz und Frau Elizabeth
1886

chem.ch.huji.ac.il/history/hertz.htm



Hertz's transmitter
and receiver, 1886

Heinrich Rudolf Hertz

* 22.2.1857 in Hamburg

1883 - 85 Privatdozent an der CAU

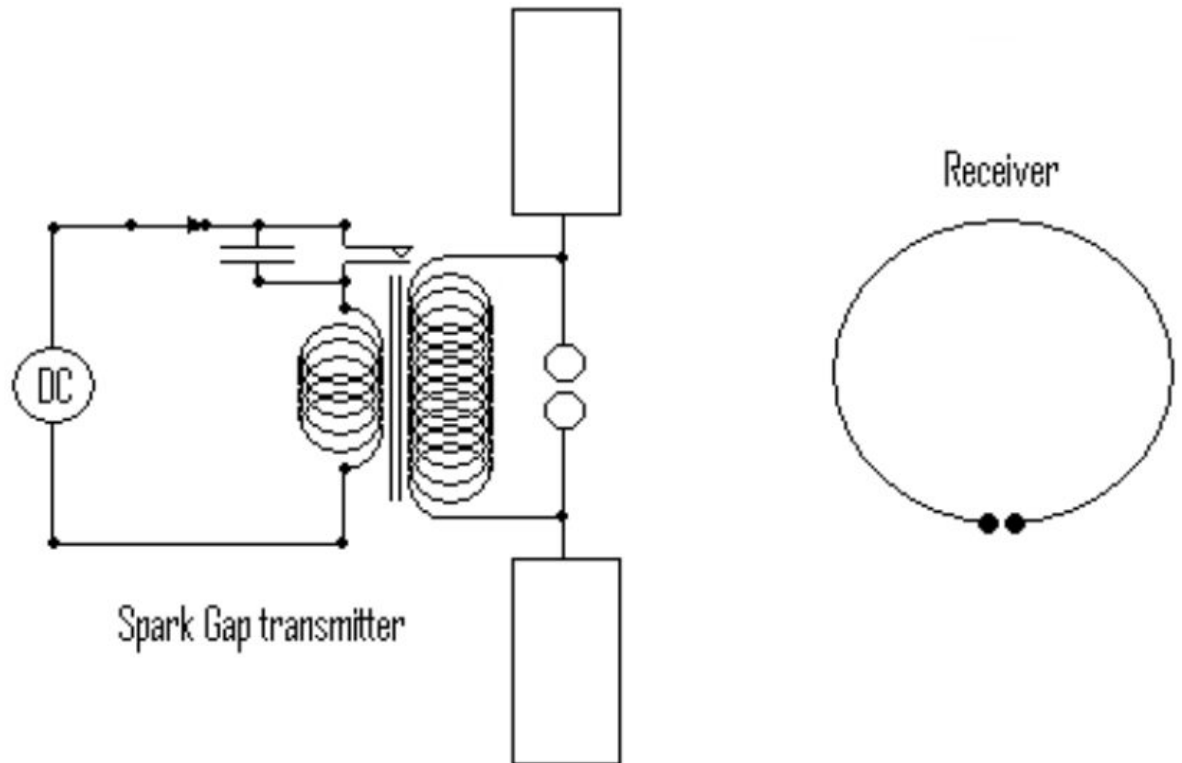
† 1.1. 1894 in Bonn

experimentelle Beobachtung von Radiowellen

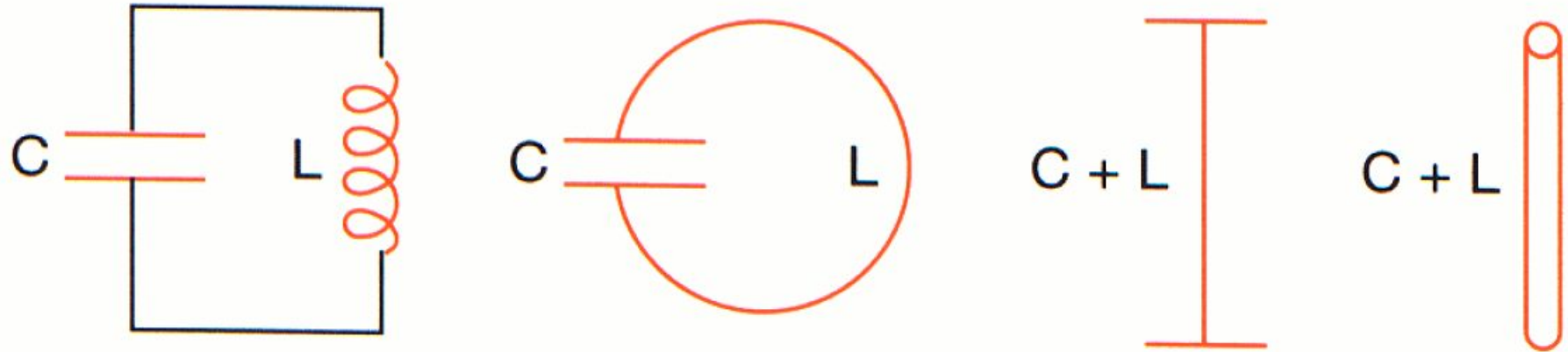
erzeugt mit Funkeninduktor

stehende Wellen mit Zinkspiegel

nachgewiesen mit Dipoldetektor



Hertzscher Dipol

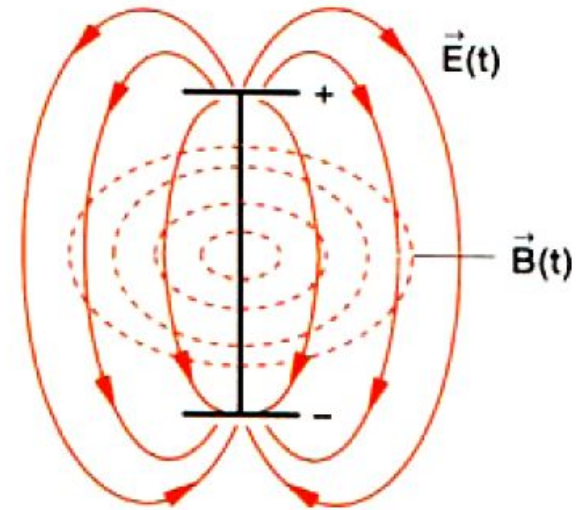
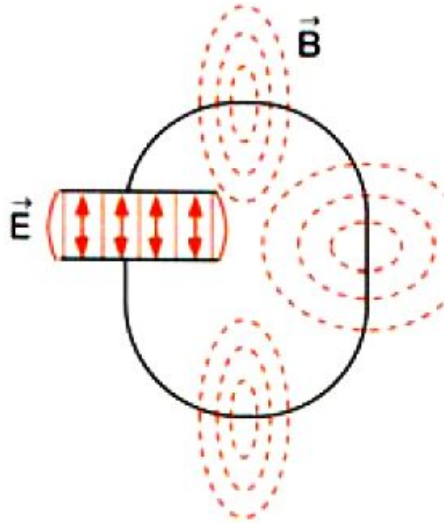
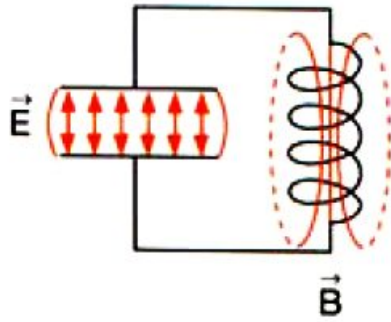


Induktivität = Länge * (Induktivität / Länge)

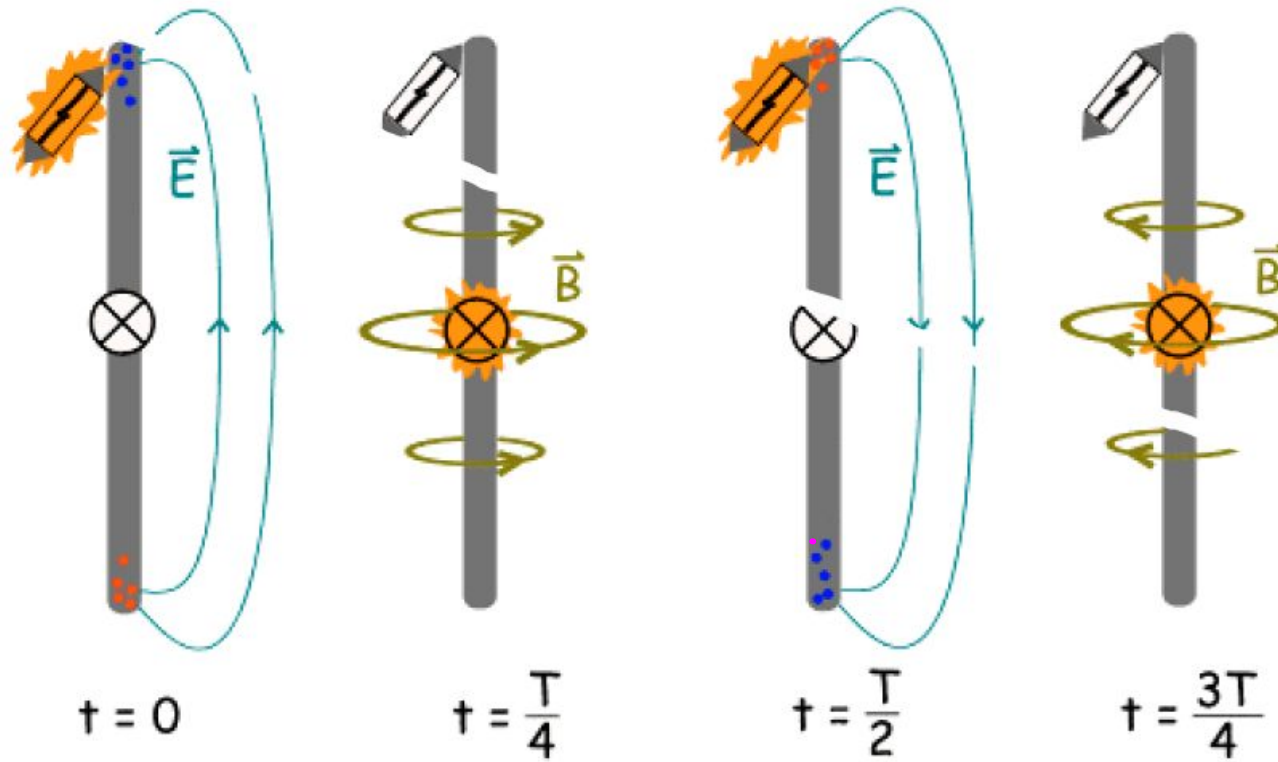
Kapazität = Länge * (Kapazität / Länge) * Permeabilitätszahl

$$\omega = \frac{1}{l} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{L} \tilde{C}}}$$

E und B-Feld

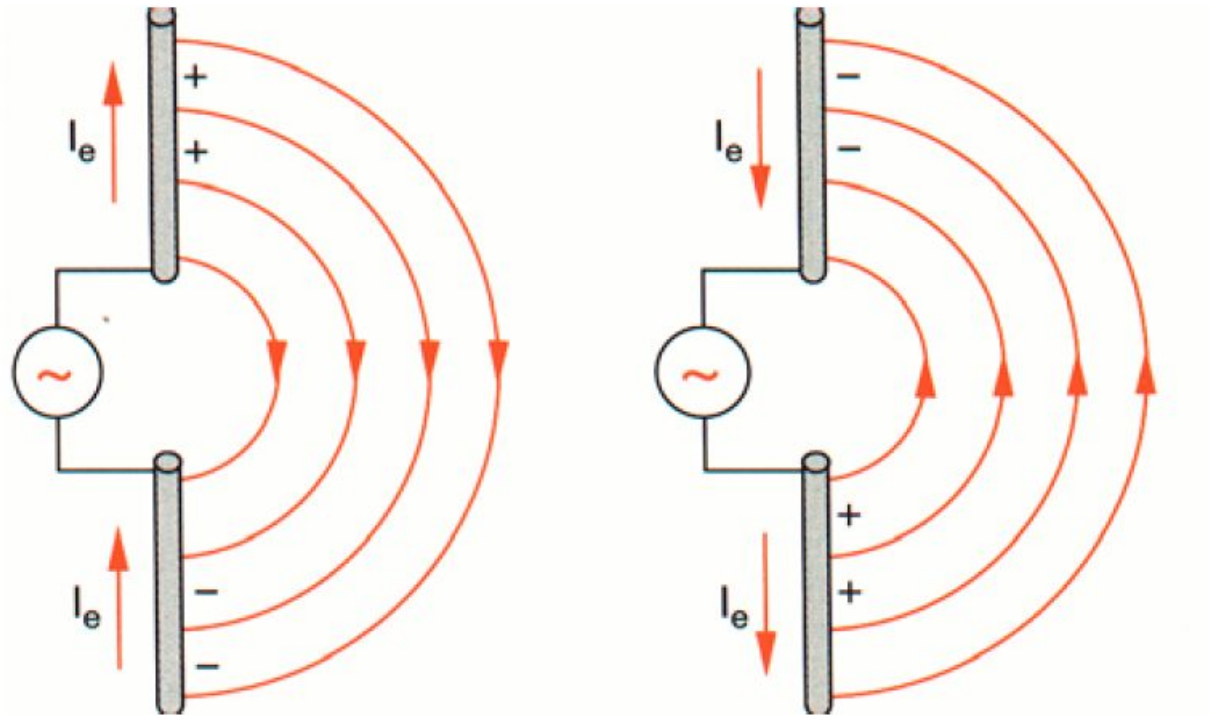


Strom und Ladung



Erzwungene Schwingung

Dämpfung durch Drahtwiderstand und Abstrahlung

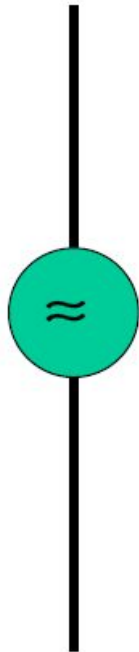


Funke = Deltapuls

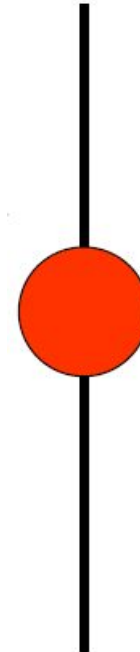
Resonanz

Sender und Empfänger auf gleiche Frequenz abgestimmt

Sender



Empfänger



z. B. 125 MHz: $\lambda = 2,4 \text{ m}$, Antenne z. B. $\lambda/2$ (gestreckter Dipol)

Wellen in Mechanik:

(obwohl Laufricht. x)

$$y(x, t) = \tilde{y} \sin(kx - \omega t) \quad \text{"Auslenkung" eines Mediums}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad ; \quad c = \frac{\omega}{k}$$

Jetzt: EM Wellen im Vakuum (!)

$$\rho = 0$$

$$j = 0$$

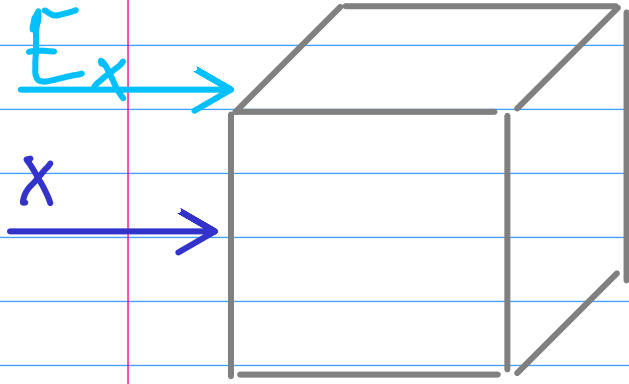
$$\oint \vec{E} d\vec{A} = 0 \quad (1)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\dot{\Phi}_B \quad (3)$$

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (2)$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\Phi}_E \quad (4)$$

Nutze ①



(a) E_y & E_z sind jeweils gleich auf Flächen vorn & hinten, weil Welle in x läuft.

Oberflächennormalen zeigen aber jeweils in entgegengesetzte Richtungen

$\Rightarrow$ Beitrag dieser Flächen zu $\oint \vec{E} d\vec{A}$ ist Null.

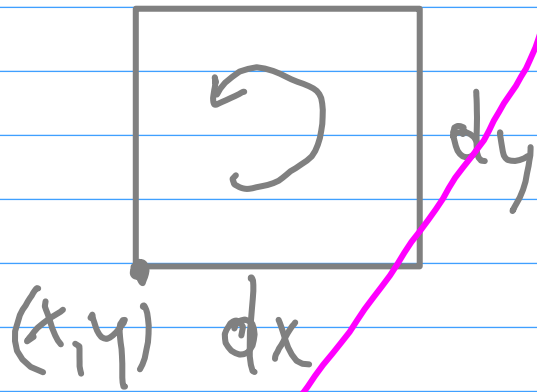
(b) E_x ist nur links & rechts $\parallel$ Normale

$\Rightarrow$ Damit $\oint \vec{E} d\vec{A} = 0$ müssen E_x links & rechts gleich sein $\Rightarrow E_x = 0$ (wenn es eine Welle sein soll) $\Rightarrow E$ -Feld transversal

Also Ansatz:

$$E_y = E_y^0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

Nutze ② $\oint \vec{E} d\vec{s} = -\dot{\Phi}_B$



$$\begin{aligned}\oint \vec{E} d\vec{s} &= E_y(x+dx) dy - E_y(x) dy \\ &= \left(E_y(x) + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \right) dy - E_y(x) dy\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} B_z \cdot dx dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (*)$$

Gleiche Überlegung für Flächenelement
in x - z -Ebene:

$$\vec{E}_y \perp dx, dz \Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

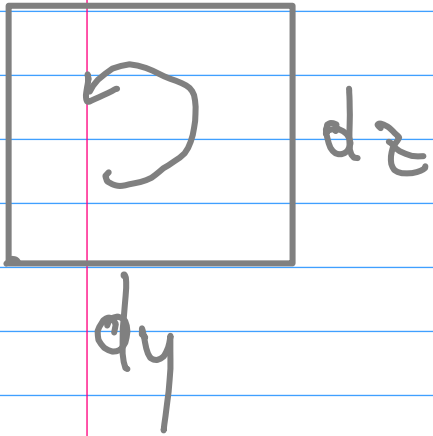
$$\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} dx dz = 0$$

mit MWG ③

Damit eine Wellenlösung
entsteht also $\dot{B}_y = 0$

Nutze weiter ③

y-z-Ebene



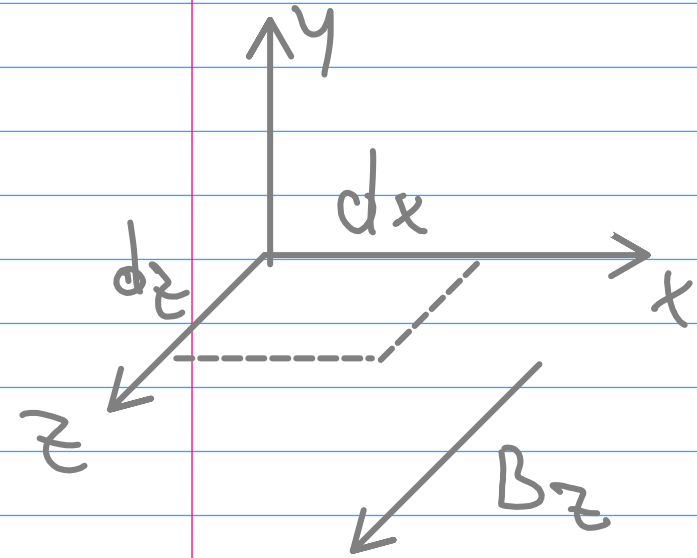
Welle läuft in x-Richtung

Also $E_y = \text{const}$ auf gesamtem
Flächenelement

$\Rightarrow$ linke Seite von Gl. ③ ist Null

$$\Rightarrow dy dz \dot{B}_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

Nutze ④ $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\Phi}_E$



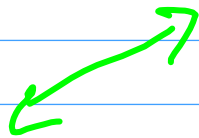
$$\int \vec{B} d\vec{s} = B_z dz - \left(B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} dx \right) dz$$

$$= - \frac{\partial B_z}{\partial x} dx dz$$

$$\dot{\Phi}_E = \frac{d}{dt} (E_y dx dz)$$

mit obiger NWG. $\Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (**)$

$$\frac{\partial}{\partial x} (*) : \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} B_z$$



$$\frac{\partial}{\partial t} (**): \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} B_z = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Wellengleichung für E_y
mit Phasengeschw.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Analoge Gleichung für B_z :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z = \epsilon_0 \mu_0 \ddot{B}_z$$

Bestimme B_z aus (*):

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -E_y \frac{1}{c} \omega \cos(\omega(t - \frac{x}{c})) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \bigg| \int dt$$

$$\Rightarrow B_z = E_y \frac{1}{c} \sin(\omega(t - \frac{x}{c})) = \frac{1}{c} E_y$$

Also: • E, B in Phase

$$\bullet \frac{E_y}{B_z} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Elektromagnetische Wellen: Eigenschaften

transversal, $\mathbf{k} \parallel (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$

$1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$ unabhängig von ω (und ν)

$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$

E, B in Phase

$E_y/B_z = c$ (Laufrichtung x angenommen)

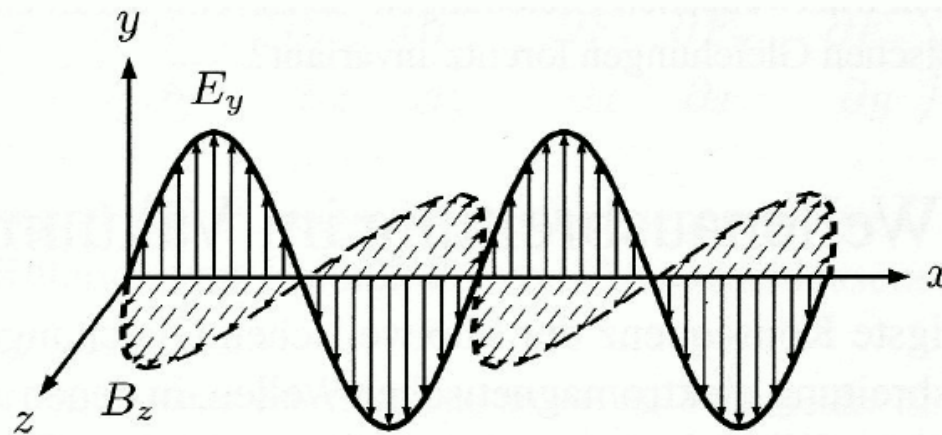


Bild 10.4: Harmonische, ebene elektromagnetische Welle in x -Richtung.

Ende der V am

2.6.20