Kapitel 4

Elektrizität und Magnetismus

4.1 Elektrische Ladung

Wir beginnen die Elektrizitätslehre, indem wir eine neue Eigenschaft von Materie kennenlernen: die elektrische Ladung. Wenn Sie an einem trockenen Tag über den Teppichboden schlürfen und dann Ihre Hand in die Nähe einer metallischen Türklinke bringen, dann können Sie überspringende Funken sehen. Ähnliche Funkenbildung können Sie beobachten, wenn Sie im Dunklen beispielsweise einen Pullover aus synthetischen Fasern aus- oder anziehen - auf jeden Fall hören Sie das Knistern. Im Wettergeschehen sind uns Blitze ein wohlbekanntes Phänomen. Bei diesen vorgestellten Beispielen ist elektrische Ladung involviert. Elektrische Ladung ist wie die Masse ein intrinsisches Charakteristikum der Materie. Wir kennen zwei Sorten von elektrischer Ladung, von denen wir wissen, dass sich gleichnamige Ladungen abstoßen und ungleichnamige anziehen. Geladene Körper wechselwirken also miteinander, indem sie Kräfte aufeinander ausüben. Auf Benjamin Franklin und Georg Christoph Lichtenberg geht die willkürliche Festlegung von positiver und negativer Ladung zurück. Ein Objekt erscheint neutral, also ungeladen, wenn es gleich viel positive wie negative Ladung enthält.

4.1.1 Leiter und Isolatoren

Wenn sich Ladung in einem Material leicht bewegen lässt, dann sprechen wir von einem Leiter. So sind Metalle, aber auch der menschliche Körper, Leiter. Kann sich hingegen in einem Material die Ladung nicht frei bewegen, dann sprechen wir von einem Nichtleiter oder Isolator (etwa Glas, Plastik oder chemisch reines Wasser). Halbleiter, wie beispielsweise Germanium oder Silizium, sind Materialien, die weder ganz Leiter noch ganz Isolator sind. Supraleiter setzen der Bewegung von Ladung keinen Widerstand entgegen. Welche Objekte tragen nun die Ladung? Wie Sie wissen, besteht ein Atom aus einem Kern und Elektronen, wobei der Kern aufgebaut ist aus Protonen und Neutronen. Die Elektronen tragen negative, die Protonen positive Ladung; die Neutronen sind elektrisch neutral. Wenn Sie nun Metallatome (etwa Kupfer) zu einem Kristallgitter zusammenfügen, dann bildet sich ein nahezu frei bewegliches Elektronengas im Kupferfestkörper; die Kupferatome hingegen bleiben als positiv geladene Ionenrümpfe fest an ihrem Gitterplatz. Die Erscheinung der Influenz beweist Ihnen die leichte Beweglichkeit der Elektronen. Betrachten Sie hierzu Abb. 4.1. Ein neutraler Kupferstab ist wie gezeigt drehbar aufgehängt. Wir bringen einen negativ geladenen Plastikstab in die Nähe des Kupferstabs und beobachten, dass sich der Kupferstab auf den Plastikstab zubewegt. Dieses Experiment können

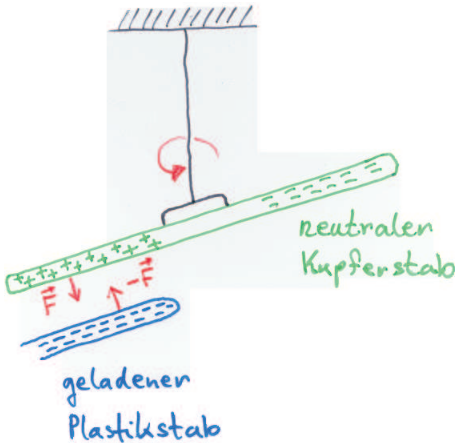


Abbildung 4.1: Ladungstrennung in einem neutralen Kupferstab.

wir erklären, wenn wir annehmen, dass die leicht beweglichen Elektronen im Kupferstab von den negativen Ladungen des Plastikstabs verdrängt werden und eine postive Ladung im Kupferstab zurücklassen. Letztere Ladung erfährt aber eine Anziehung vom negativ geladenen Plastikstab, so dass sich der Kupferstab in der angegebenen Richtung dreht.

4.1.2 Coulomb-Gesetz

Wir wollen die Kraft zwischen zwei Ladungen genauer formulieren. Charles Augustin Coulomb hat um 1785 viele Experimente zur Bestimmung des Kraftgesetzes durchgeführt. Dabei hat er für zwei Punktladungen q_1 und q_2, die sich im Abstand r voneinander befinden und sich nicht bewegen (elektrostatisch), gefunden, dass

$$F = k\,\frac{q_1\,q_2}{r^2} \tag{4.1}$$

die Kraft zwischen diesen Ladungen ist. Die Einheit der Ladung lautet

$$[q] = \text{Coulomb} = \text{C}. \tag{4.2}$$

Beachten Sie, dass diese Einheit eine abgeleitete und damit keine SI-Einheit ist. Später werden wir die SI-Einheit notieren. Die Größe k ist die elektrostatische Konstante, für die man

$$k = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \tag{4.3}$$

schreibt. Hierin ist ϵ_0 die sogenannte Dielektrizitätskonstante oder elektrische Feldkonstante oder Permittivität. Sie besitzt die Größe

$$\epsilon_0 = 8{,}854188 \times 10^{-12}\,\frac{\text{C}^2}{\text{N}\,\text{m}^2}. \tag{4.4}$$

Ob die Kraft anziehend oder abstoßend ist, entscheidet das Vorzeichen der involvierten Ladungen. Es ist interessant, dass das Coulomb-Gesetz bislang jeden experimentellen Test überstanden hat - selbst im Bereich der Atome kann die Wechselwirkung zwischen Protonen und Elektronen mit dem Coulomb-Gesetz beschrieben werden. Wir halten noch fest, dass für die elektrostatischen Kräfte das Prinzip der Superposition gilt. Wie in der Mechanik können Sie also Kräfteparallelogramme zeichnen, um die Resultierende zu finden.

4.1.3 Elementarladung

Jede positive oder negative Ladung q ist aus einer ganzen Zahl von Elementarladungen zusammengesetzt, also

$$q = n\,\mathrm{e}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{4.5}$$

Hierin ist e die Elementarladung mit der Größe

$$\mathrm{e} = 1{,}602189 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}. \tag{4.6}$$

4.1.4 Ladungserhaltung

Ladung wird weder erzeugt noch vernichtet. In unseren Experimenten wird die Ladung immer nur von einem zum anderen Körper übertragen. Dieses Erhaltungsgesetz geht auch auf Benjamin Franklin zurück und ist in den Kanon der Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung aufzunehmen.

4.2 Elektrische Felder

Weiter oben haben wir gesehen, dass das Coulomb-Gesetz die elektrostatische Wechselwirkung zwischen zwei Punktladungen beschreibt. Ungeklärt bleibt indes die Frage, woher die eine Ladung von der Existenz der anderen weiß.

4.2.1 Das elektrische Feld

Das Modell, dass elektrische Ladung stets von einem elektrischen Feld umgeben ist, geht auf Michael Faraday zurück. Wir definieren dieses Feld wie folgt: nehmen Sie eine positive Probeladung q_0 und bringen Sie sie in das auszumessende elektrische Feld. An jedem Punkt messen Sie dann Betrag und Richtung der auf die Probeladung wirkenden Kraft $\vec{F}$. Der Vektor des elektrischen Feldes ist dann gegeben durch

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \tag{4.7}$$

wobei die Einheit lautet

$$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}. \tag{4.8}$$

Beachten Sie, dass die Probeladung so gewählt sein muss, dass ihr eigenes elektrisches Feld das zu bestimmende nicht wesentlich stört. Beachten Sie weiter, dass das elektrische Feld eine Modellvorstellung ist, mit der wir die Wechselwirkung zwischen Ladungen beschreiben können. Wir wollen daher die Existenz eines elektrischen Feldes auch ohne Probeladung postulieren - es existiere a priori.

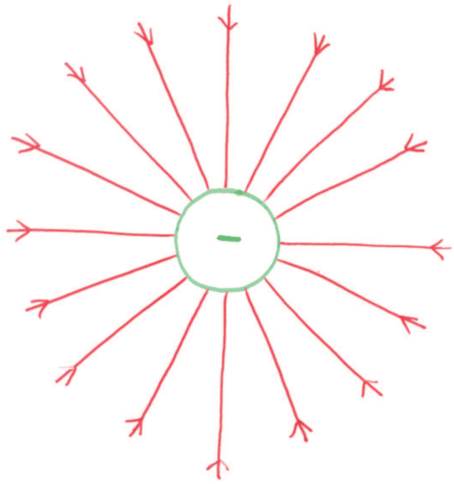


Abbildung 4.2: Das elektrische Feld einer negativ geladenen Kugel.

4.2.2 Elektrische Feldlinien

Der Raum um einen geladenen Körper ist also ausgefüllt mit Kraftlinien. Wir merken uns die folgenden Regeln zum Zeichnen eines elektrischen Feldes:

- An jedem Punkt des Kraftfeldes gibt die Richtung der Tangente die Richtung des elektrischen Feldes an.
- Die Anzahl der Kraftlinien, die senkrecht eine Einheitsfläche durchstoßen, ist proportional zur Größe des elektrischen Feldes.
- Elektrische Feldlinien zeigen von positiven Ladungen weg (sie entstehen dort) und weisen auf negative Ladungen zu (sie enden dort).

Betrachten Sie als Beispiel das elektrische Feld einer negativ geladenen Kugel (Abb. 4.2). Sie sehen in dieser Abbildung, dass die Feldlinien dichter werden, je geringer der Abstand von der geladenen Kugel ist. Getreu unseren Zeichenregeln bedeutet dies, dass das elektrische Feld größer wird. Nun haben wir zu Beginn dieses Abschnitts über Feldlinien gesagt, dass sie insbesondere zur Visualisierung der Wechselwirkung zwischen Ladungen dienen. Betrachten Sie hierzu Abb. 4.25, in der Sie links zwei positive geladene Kugeln und rechts eine positiv und eine negativ geladene Kugel sehen. Allein die Betrachtung der Feldlinienbilder sagt Ihnen, dass im einen Fall Abstoßung und im anderen Fall Anziehung vorliegt.

4.2.3 Das elektrische Feld einer Punktladung

Wir messen das elektrische Feld einer Punktladung der Größe q, indem wir eine Probeladung q_0 in das elektrische Feld bringen. Mit Hilfe des Coulombschen Gesetzes können wir die Kraft über

$$F = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q\,q_0}{r^2}$$

Abbildung 4.3: Visualisierung der elektrostatischen Wechselwirkung zwischen Punktladungen.

bestimmen. Damit lautet das elektrische Feld einer Punktladung im Abstand r

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}. \tag{4.9}$$

Wie für die elektrostatische Kraft gilt auch für das elektrische Feld das Prinzip der Superposition.

4.2.4 Punktladung im elektrischen Feld

Betrachten wir eine Ladung der Größe q in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ stationärer oder langsam sich bewegender Ladungen, dann erfährt die Ladung q die Kraft

$$\vec{F} = q\,\vec{E}. \tag{4.10}$$

Um zu betonen, dass das elektrische Feld nicht von der Ladung q selbst stammt, bezeichnet man $\vec{E}$ auch als externes oder äußeres Feld. Als ein Beispiel behandeln wir das Drucken mit einem Ink-Jet-Drucker. Wie Sie wissen, spritzt dieser Drucker Tinte auf ein Blatt Papier; dies funktioniert sehr schnell und mit hoher Qualität. Hierzu werden die Tintentröpfchen negativ geladen und in einem elektrischen Feld zwischen zwei parallelen Platten so abgelenkt, dass sie an die gewünschte Stelle des Papiers gelangen. In der Praxis wird die Ladung der Tröpfchen verändert, um unterschiedliche Ablenkungen im konstant gehaltenen elektrischen Feld zu erreichen. Das Gerät zur Aufladung der Tröpfchen wird von elektronischen Signalen der zu druckenden Zeichen gesteuert. Ein weiteres, sehr eindrückliches Beispiel sind Blitze in Vulkanwolken. Beim Ausbruch des Sakurajima am 18. Mai 1991 konnte man diese Blitze sehr schön beobachten. Dabei wurde Asche empor geschleudert, die durch plötzliches Verdampfen flüssigen Wassers im Vulkangestein entsteht. Die Verdampfung des Wassers und die Explosion des Vulkangesteins führen zu einer Trennung von positiver und negativer Ladung in einer Wasserdampf-Asche-Wolke über dem Vulkan. Wenn das elektrische Feld zwischen diesen Ladungen größer wird als $3 \times 10^6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$, dann beginnt die Luft leitend zu werden - es entstehen die Blitze innerhalb der Wolke aus Asche und Wasserdampf, aber auch zwischen der Wolke und dem Vulkan. Das elektrische Feld ist so stark, dass es Luftmoleküle ionisiert. Bei der Ionisation werden Elektronen aus den Molekülen herausgelöst. Diese Elektronen werden durch das elektrische Feld beschleunigt und stoßen mit weiteren Luftmolekülen zusammen, die dann Licht emittieren.

Abbildung 4.4: Ladung im homogenen elektrischen Feld.

4.3 Elektrische Spannung und elektrisches Potential

4.3.1 Die elektrische Spannung

Betrachten Sie das linke Bild der Abbildung 4.4. Es zeigt Ihnen eine positive Ladung, die sich in einem sogenannten homogenen elektrischen Feld befindet. Wie wir später noch genauer sehen werden, kann ein solches homogenes Feld von einem Paar zueinander paralleler und entgegengesetzt geladener Platten erzeugt werden. Die Punktladung wird von der unteren Platte mit der Kraft $F = qE$ angezogen. Eine analoge Situation finden Sie im homogenen Gravitationsfeld der Erde, wie Sie es in Erdnähe vorfinden: aufgrund der Gravitationskraft erfahren Körper eine Kraft zum Erdmittelpunkt. Welche Arbeit muss man nun verrichten, um die positive Ladung gegen die Kraftlinien zu verschieben? Dazu schreiben wir die Definitionsgleichung der mechanischen Arbeit auf, nämlich

$$W = Fs = qEd. \tag{4.11}$$

Diese Energie wird frei, wenn Sie die Ladung sich selbst überlassen. Die Feldkräfte verrichten jetzt Arbeit an ihr und erhöhen ihre kinetische Energie. Das elektrische Feld vermag also, Energie zu spenden. Mit Hilfe der elektrischen Spannung können wir diese Eigenschaft genauer charakterisieren. Man definiert

$$U = \frac{W}{q} \tag{4.12}$$

als elektrische Spannung. Die Einheit lautet:

$$[U] = \text{Volt} = \text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}}. \tag{4.13}$$

Wir merken uns: *Besteht zwischen Körpern Spannung, so steht elektrische Energie auf Abruf bereit. Spannung entsteht, wenn man entgegengesetzte Ladungen unter Arbeitsaufwand trennt.*

Wir haben die Ladung entlang der Feldlinien bewegt, um die Arbeit zu berechnen. Das elektrostatische Feld ist wie das Gravitationsfeld ein konservatives. Infolgedessen kommt es auf den Weg gar nicht an – es zählt lediglich der Höhenunterschied, der im Feld überwunden wird. Für solche konservative Kraftfelder kann man ein Potential definieren, worüber wir im nächsten Abschnitt mehr erfahren.

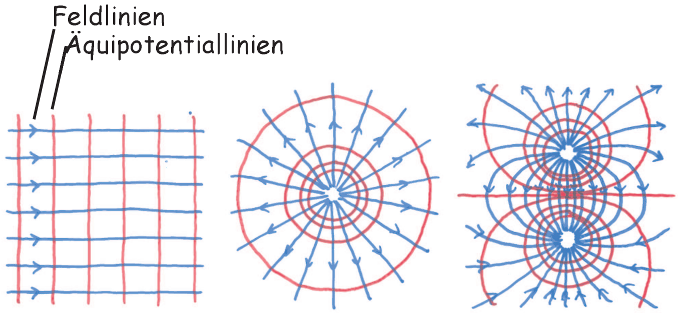


Abbildung 4.5: Äquipotentiallinien verschiedener elektrischer Felder.

4.3.2 Elektrische potentielle Energie

Betrachten wir nochmals Abbildung 4.4. Falls wir die Ladung irgendwo im elektrischen Feld verschieben, sagen wir um eine Strecke der Länge d längs der Feldlinien, dann verrichten wir die Arbeit $W = qEd$. Hieraus folgt aber, dass die Spannung $U = Ed$ ist. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass längs der Feldlinien ein Spannungsgefälle herrscht. Man kann also die Spannung auch zwischen zwei Punkten des Feldes definieren – nicht nur zwischen Leitern (also zwischen den Platten in Abbildung 4.4). Diese Erkenntnis motiviert zur Definition des elektrischen Potentials. Wie in der Mechanik benötigen wir auch hier ein Bezugsniveau. Das elektrische Potential des Bezugsniveaus soll Null sein, weshalb wir es auch Nullniveau (NN) nennen. In der Technik bezeichnet man dieses Nullniveau als *Masse*. Wir definieren:

> Das Potential φ eines Punktes A ist die Spannung von A gegen ein Bezugsniveau (Nullniveau). Die Spannung U zwischen zwei Punkten ist die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ zwischen ihnen.

Das Wort Potential erinnert uns an die potentielle Energie im Schwerefeld. Heben wir etwa einen Apfel gegen die Schwerefeldlinien nach oben, so steigt die potentielle Energie des Systems Apfel-Erde. Im rechten Bild der Abbildung 4.4 ernennen wir die untere, negative Platte zum Bezugsniveau mit dem Potential $\varphi_1 = 0$. Die positiv geladene Platte habe dann bezüglich der unteren Platte das Potential $\varphi_2 = 1000\,\mathrm{V}$. Um die positive Ladung gegen die Feldlinien zu bewegen, ist die Arbeit $W = qU = q(\varphi_2 - \varphi_1)$ nötig. Wir merken uns: *Die elektrische Energie eines Systems steigt, wenn äußere Kräfte Ladung gegen seine Feldkräfte verschieben; sie sinkt, wenn die Feldkräfte des Systems Ladung transportieren.*

Wir wissen bereits, dass die elektrostatische Kraft eine konservative ist. Mit Hilfe des Potentialbegriffs können wir diese Eigenschaft wie folgt beschreiben: Das Potential eines Punktes ist vom Weg zu ihm unabhängig.

4.3.3 Äquipotentiallinien und -flächen

Benachbarte Punkte mit demselben elektrischen Potential bilden eine Äquipotentialfläche. Auf so einer Fläche verrichten die elektrostatischen Kräfte keine Arbeit W, denn es gilt ja für jeden Anfangs- und Endpunkt, i und f, auf der Äquipotentialfläche $\varphi_i = \varphi_f$. Abbildung 4.5 zeigt

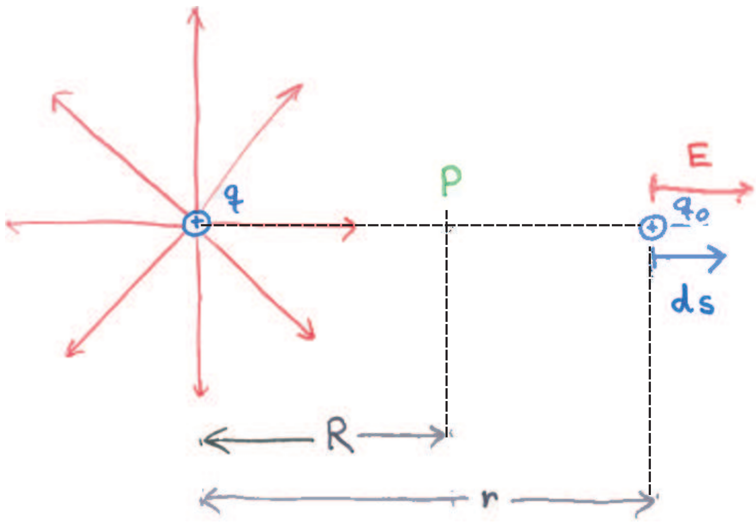


Abbildung 4.6: Das elektrische Potential im Abstand r einer Punktladung.

Ihnen einige Äquipotentiallinien ausgesuchter Felder: links sehen Sie das homogene elektrische Feld einer ausgedehnten metallischen Platte, in der Mitte das schon bekannte elektrische Feld einer Punktladung und schließlich rechts das Feld zweier sich anziehender Punktladungen. Einige Äquipotentiallinien wurden eingezeichnet und Sie erkennen, dass diese Linien gleichen Potentials senkrecht auf den Vektoren des elektrischen Feldes stehen. Wäre dies nicht so, dann gäbe es eine nicht verschwindende Komponente des elektrischen Feldes entlang der Äquipotentiallinie. In diesem Fall aber könnte das elektrostatische Feld auf der Äquipotentiallinie an einer Ladung Arbeit verrichten. Dies widerspräche der Definition der Linien oder Flächen gleichen Potentials. Wir merken uns: *Alle Punkte auf Äquipotentialflächen haben das gleiche Potential φ. Man braucht keine Energie, um Ladungen auf ihnen zu verschieben. Äquipotentialflächen stehen senkrecht zu den elektrischen Feldlinien.*

Äquipotentiallinien oder -flächen sind nichts Mystisches. Die Höhenlinien auf einer Landkarte sind beispielsweise Äquipotentiallinien des Gravitationsfeldes: Auf einer solchen Linie ist die Höhe – gemessen etwa relativ zum Meeresniveau – konstant, und damit ändert sich die potentielle Energie dort nicht.

4.3.4 Elektrisches Potential einer Punktladung

Als ein sehr wichtiges Beispiel für elektrische Potentiale geben wir hier das Potential einer Punktladung ohne Herleitung an. Betrachten Sie dazu auch Abb. 4.6. Wir suchen das Potential der Ladung q an einem beliebigen Punkt P, der sich im Abstand R von der Punktladung befindet. Dieses Potential beziehen wir auf das Nullniveau im Unendlichen. Zur Berechnung des Potentials bewegen wir eine positive Punktladung der Größe q_0 vom Punkt P ins Unendliche. Da, wie wir wissen, die elektrostatische Kraft eine konservative Kraft ist, spielt der Pfad, auf dem die Probeladung das Nullniveau erreicht, keine Rolle - wir wählen daher den einfachsten: der Pfad folge der radialen Richtung. Das elektrische Potential im Abstand r von einer Punktladung lautet:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{4.14}$$

Wir halten insbesondere fest, dass das elektrische Potential einer positiven (negativen) Ladung positiv (negativ) ist.

Haben Sie mehrere Punktladungen (N Stück) im Raum verteilt, dann ist das resultierende elektrische Potential dieser Ansammlung von Punktladungen die Summe der Einzelpotentiale, es gilt also

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}. \tag{4.15}$$

In dieser Gleichung ist q_i die Größe der Ladung der i-ten Punktladung und r_i der Abstand von dieser Ladung.

4.4 Kapazität und Kondensatoren

Mechanische Energie können Sie speichern, indem Sie eine Feder spannen oder einen Gegenstand anheben. Elektrische Energie kann man in sogenannten Kondensatoren speichern. Diese Kondensatoren sind weit verbreitet im Alltag: Denken Sie nur an das Blitzlicht Ihres Fotoapparats. Hier nimmt ein Kondensator langsam Energie während des Aufladens auf und gibt sie schlagartig beim Blitzen wieder ab. Auch spielen Kondensatoren beim Abstimmen des Radio- oder TV-Empfängers eine wichtige Rolle. Wir widmen daher den Kondensatoren im Folgenden Aufmerksamkeit.

4.4.1 Kapazität

Die Kapazität charakterisiert das Fassungsvermögen eines Kondensators für elektrische Ladung. Betrachten wir den in Abb. 4.7 gezeigten Plattenkondensator. Wenn dieser Kondensator geladen wird, dann fließen Ladungen auf seine Platten: eine Platte enthält die Ladung $+q$ und die andere $-q$. Damit baut sich zwischen den Platten eine Potentialdifferenz auf, die wir hier nicht mit ΔU, sondern einfach mit U bezeichnen. Als Kapazität bezeichnet man nun die Größe

$$C = \frac{q}{U}. \tag{4.16}$$

Diese Größe hängt ausschließlich von der Geometrie der Platten ab, nicht hingegen von der Ladung oder Potentialdifferenz. Die Einheit der Kapazität ist

$$[C] = \text{Farad} = \text{F} = \frac{\text{C}}{\text{V}}. \tag{4.17}$$

Man kann einen Kondensator laden, indem man ihn in einen Stromkreis mit einer Batterie legt. Ein Stromkreis ist ein Pfad, durch den elektrische Ladung fließen kann (wir werden dies später noch genauer beschreiben). Die Batterie besitzt einen Plus- und einen Minus-Pol, zwischen denen eine feste Potentialdifferenz liegt. Diese Batterie kann nun Ladung durch die Zuleitungen auf die Kondensatorplatten schieben. Dazu muss der Stromkreis allerdings geschlossen sein. In Abb. 4.7 ist der Stromkreis offen, wie Sie leicht an der Stellung des Schalters sehen. Sie wissen schon, dass die bewegte Ladung von den Elektronen getragen wird. Bei geschlossenem Stromkreis fließen also Elektronen von der einen Kondensatorplatte zur anderen. Nach einer Weile wird das elektrische Feld zwischen den Platten so groß, dass keine weiteren Elektronen mehr von der Batterie nachgeführt werden können. Dies bedeutet aber, dass die Potentiale der Platten gleich

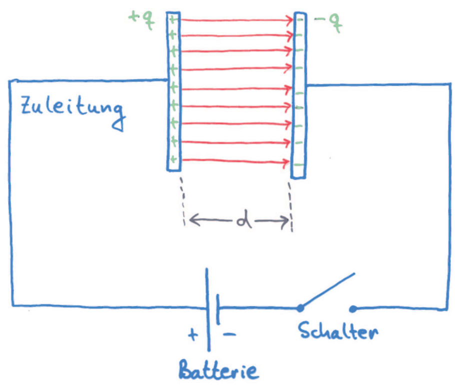


Abbildung 4.7: Plattenkondensator.

den Potentialen der Batterieklemmen sind. Daher gibt es in den Zuleitungen kein elektrisches Feld mehr, das die Elektronen bewegen könnte. Man sagt, dass der Kondensator nun vollständig geladen ist.

Die Kapazität eines Plattenkondensators, dessen Platten die Fläche A und den Abstand d voneinander haben, geben wir hier ohne Herleitung an:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{4.18}$$

4.4.2 Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

Sie können Kondensatoren in beliebiger Kombination in einem Stromkreis aufbauen. Die Frage ist am Ende, wie groß die Kapazität dieser Kombination ist. Wie groß ist also die Kapazität eines einzelnen Ersatzkondensators, der anstelle Ihrer Kombination mehrerer Kondensatoren in den Stromkreis gebaut werden soll?

Parallelschaltung

Die linke Seite der Abb. 4.8 zeigt Ihnen einen Stromkreis, in dem drei Kondensatoren parallel zur Batterie geschaltet sind. Dies bedeutet, dass jede Platte der Kondensatoren dasselbe elektrische Potential wie die mit ihnen verbundene Batterieklemme besitzt. Die gesamte Ladung ist die Summe der Ladungen, die von den einzelnen Kondensatoren gespeichert wird. Ist U die Potentialdifferenz zwischen den Batterieklemmen, dann können wir für die in den Kondensatoren gespeicherte Ladung schreiben

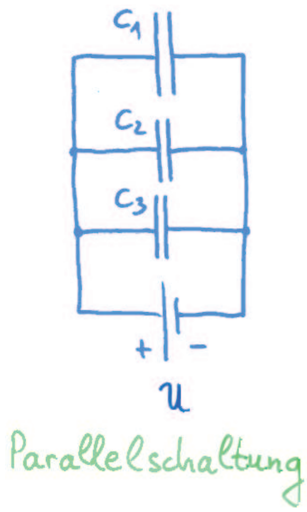
$$q_1 = C_1\, U \qquad q_2 = C_2\, U \qquad q_3 = C_3\, U.$$

Da sich die Gesamtladung q nun aus der Summe der Einzelladungen ergibt, erhalten wir

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)\, U$$

und damit für die Kapazität C des Ersatzkondensators

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + C_3.$$



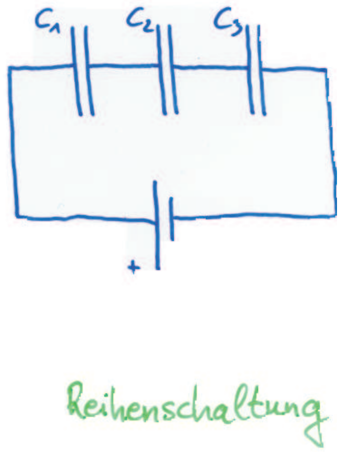


Abbildung 4.8: Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren.

Ist die Anzahl der parallel geschalteten Kondensatoren allgemein N, dann gilt

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i. \tag{4.19}$$

Die Gesamtkapazität von N parallel geschalteten Kondensatoren mit den Einzelkapazitäten C_i ist also einfach die Summe aller Einzelkapazitäten.

Reihenschaltung

Die rechte Seite der Abb. 4.8 illustriert die Reihenschaltung dreier Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1, C_2 und C_3. Eine Reihenschaltung bedeutet, dass die Bauteile hintereinander mit den Zuleitungskabeln verbunden werden. Ladung kann also nur entlang eines einzigen Pfades transportiert werden. In diesem Fall bewegt die Batterie die Elektronen von der linken Platte des linken Kondensators auf die rechte Platte des rechten Kondensators. Bis auf das Vorzeichen tragen also diese beiden Platten dieselbe Ladung q. Durch Influenz tragen die anderen Platten (insbesondere die Platten des mittleren Kondensators) ebenso die Ladung q. Damit gilt also für die Reihenschaltung:

$$q = C_1\, U_1 = C_2\, U_2 = C_3\, U_3$$

und damit

$$U_1 = \frac{q}{C_1} \qquad U_2 = \frac{q}{C_2} \qquad U_3 = \frac{q}{C_3}.$$

Wir suchen jetzt wieder einen Kondensator, der die Kombination dieser Kondensatoren mit derselben gesamten Kapazität ersetzt. Die Potentialdifferenz der Batterie ergibt sich aus der Summe der Potentialdifferenzen an den Kondensatoren, also

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}$$

und damit lautet die Kapazität des Ersatzkondensators

$$C = \frac{q}{U} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2}}$$

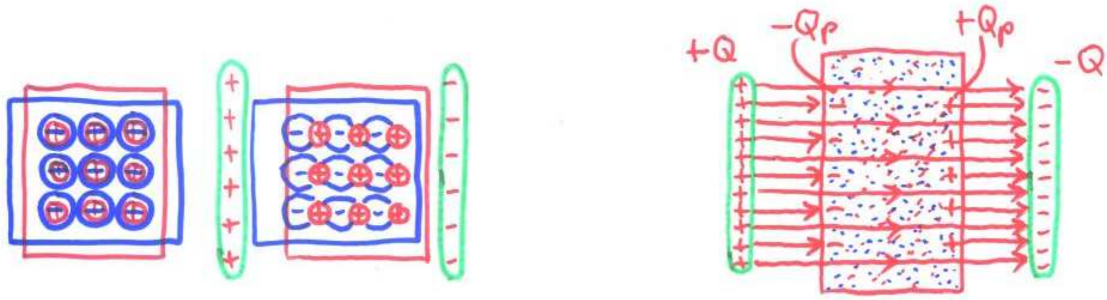


Abbildung 4.9: Wirkungsweise eines Dielektrikums.

oder anders geschrieben

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Sind allgemein N Kondensatoren in Reihe geschaltet, dann gilt für die Gesamtkapazität C

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}, \tag{4.20}$$

falls C_i die Kapazität des i-ten Kondensators bezeichnet.

4.4.3 Mehr Kapazität durch Isolatoren

Wir bringen in den ganzen vom homogenen Feld erfüllten Raum eines Plattenkondensators einen Isolator (etwa eine Glas- oder Hartgummiplatte). Diese erhöht die Kapazität um einen Faktor ϵ_r, den man die Dielektrizitätskonstante nennt. Michael Faraday machte diese Entdeckung und schloss daraus, dass auch Isolatoren elektrische Eigenschaften haben. Man bezeichnet diese Isolatoren als Dielektrika. Wir merken uns: *Die Dielektrizitätszahl ϵ_r gibt die Erhöhung der Kapazität durch ein Dielektrikum an. Im Vakuum ist $\epsilon_r = 1$.*

Wie können wir nun die Kapazitätserhöhung durch ein Dielektrikum verstehen? Dazu betrachten wir Abb. 4.9. Ganz links sehen Sie die Skizze eines Dielektrikums, das sich in keinem äußeren elektrischen Feld befindet – die negativen Elektronenwolken (Kreise mit einem Minuszeichen) sind konzentrisch um die positiven Ionenrümpfe (kleinere Kreise mit einem Pluszeichen) positioniert. In einem elektrischen Feld jedoch werden diese Ladungen gegeneinander verschoben: die negativen (positiven) Ladungen des Dielektrikums werden von der positiv (negativ) geladenen Kondensatorplatte angezogen. Beachten Sie, dass dieser Vorgang keine Ladungstrennung im Sinne der bei Leitern besprochenen Influenz ist; beim Dielektrikum bleiben die negativen Ladungen, also die Elektronen, elastisch an den positiven Ionenrümpfen gebunden. Das rechte Bild der Abb. 4.9 zeigt, wie die im Dielektrikum entstandenen Polarisationsladungen $-Q_\mathrm{p}$ und $+Q_\mathrm{p}$ teilweise das elektrische Feld des Plattenkondensators in seinem Inneren abschwächen. Einige Feldlinien der mit $+Q$ geladenen Platte enden in den negativen Polarisationsladungen des Dielektrikums, einige passieren das Dielektrikum unbehelligt. Im Ganzen wird also das elektrische Feld des (als isoliert gedachten) Kondensators geschwächt. Wegen $U = Ed$ (d ist der Abstand der Kondensatorplatten) sinkt auch die Spannung zwischen den Platten. Damit muss aber aufgrund von $C = \frac{Q}{U}$ die Kapazität steigen. Beachten Sie, dass die Ladung Q in unserem Fall konstant

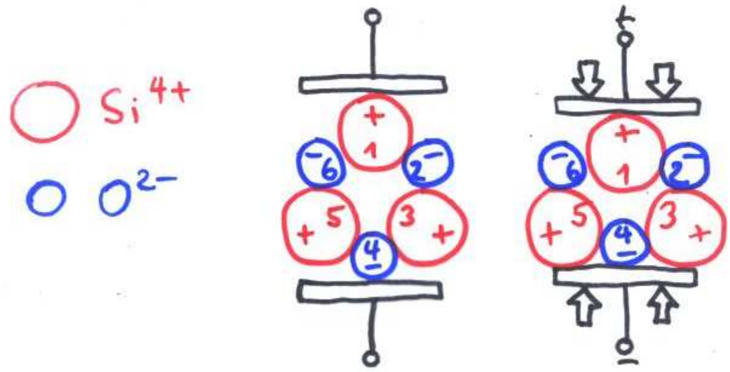


Abbildung 4.10: Schwingquarz und Piezo-Effekt.

bleibt, da wir den Kondensator als elektrisch isoliert betrachten, so dass keine Ladung ab- oder zufließen kann.

Die soeben besprochenen Polarisationsladungen spielen etwa bei der Quarz-Uhr, beim Kristallmikrofon oder beim Kristallfeuerzeug eine Rolle. Betrachten Sie Abb. 4.10: links sehen Sie einen Quarzkristall (SiO_2) eingespannt zwischen zwei neutralen Metallplatten. Die großen Kugeln (1, 3, 5) bedeuten Si^{4+}-Ionen, die kleinen (2, 4, 6) je zwei O^{2-}-Ionen. In einem äußeren, nach unten gerichteten Feld (rechts in Abb. 4.10) werden die Si^{4+}-Ionen nach unten, die O^{2-}-Ionen nach oben verschoben. Der Kristall wird breiter und niedriger. Bei umgekehrter Feldrichtung wird er höher und schmaler. Solche Schwingquarze lassen sich deshalb im elektrischen Wechselfeld bei genau passender Frequenz zu starken mechanischen Resonanzschwingungen anregen. Sie geben den Quarzuhren eine enorme Präzision (etwa 1 s auf 300 a). Wenn man umgekehrt den Quarz in vertikaler Richtung presst, rücken die O^{2-}-Ionen näher zur oberen Elektrode und influenzieren auf ihr positive Ladung. Die Si^{4+}-Ionen rücken näher zur unteren Elektrode und influenzieren Minus-Ladung. In Kristallmikrofonen und Tonabnehmern nutzt man diesen *Piezo-Effekt*, um akustische Schwingungen in elektrische Spannungsschwankungen umzuwandeln. In Piezo-Feuerzeugen gibt dieser Piezo-Effekt kurzzeitig Spannungen von einigen kV.

4.4.4 Energie im elektrischen Feld

Sie merken leicht, dass es Arbeit kostet, einen Kondensator zu laden. Mit zunehmender Ladung auf den Kondensatorplatten erhöht sich das elektrische Feld, gegen das wir Arbeit verrichten müssen, um weitere Ladung auf die Platten zu bringen. Diese von uns (von der Batterie) aufgewendete Arbeit wird im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert. Beim Entladen des Kondensators wird diese Energie wieder frei. Wie groß ist aber diese im Feld eines Kondensators gespeicherte Energie? Nehmen wir an, dass der Kondensator noch nicht vollständig geladen ist, aber bereits die Ladung q' trage und sich damit die Potentialdifferenz U' zwischen seinen Platten ausgebildet habe. Nun wollen wir eine weitere Ladung $\mathrm{d}q'$ auf die Kondensatorplatten bringen. Dazu benötigen wir die Energie

$$\mathrm{d}W = U'\,\mathrm{d}q' = \frac{q'}{C}\,\mathrm{d}q'.$$

Um den Kondensator vollständig zu laden, wird die Arbeit

$$W = \int \mathrm{d}W = \frac{1}{C} \int_0^q q' \, \mathrm{d}q' = \frac{q^2}{2\,C}$$

verrichtet. Die im Kondensator gespeicherte Energie ist also

$$W = \frac{q^2}{2\,C} = \frac{1}{2}\,C\,U^2. \tag{4.21}$$

Wo aber sitzt nun die Energie? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir den Spezialfall eines Plattenkondensators, für den wir die Kapazität als $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ und die Spannung als $U = Ed$ angegeben haben. Dies setzen wir in die Gleichung für die elektrische Energie ein und erhalten

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} C\,U^2 \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{A}{d}\,E^2 d^2 \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,V. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Infolgedessen ist die Energie dem felderfüllten Volumen $V = Ad$ und dem Quadrat der Feldstärke proportional. Die Ladung hingegen tritt nicht auf. Dies werten wir als ein Indiz dafür, dass die Energie im Feld steckt. Die räumliche Dichte der Energie beträgt $\varrho_{\mathrm{el}} = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. Wir merken uns: *Das elektrische Feld ist Sitz von Energie. Die räumliche Energiedichte beträgt $\varrho_{el} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.*

Als Beispiel behandeln wir ein medizinisches Gerät, nämlich den Defibrillator. Dieser wird eingesetzt bei lebensbedrohlichen Herzrhythmusstörungen. Bei der tragbaren Version lädt eine Batterie einen Kondensator bis zu einer hohen Potentialdifferenz. Großflächige Elektroden werden dann auf den Brustkorb des Patienten aufgesetzt und der Kondensator zur plötzlichen Entladung gebracht. Man kann einstellen, welche Energie im Feld des Kondensators gespeichert werden soll. Nehmen wir an, der Kondensator habe eine Kapazität von $70\,\mu$F und der Defibrillator werde zu einer Potentialdifferenz von 5000 V geladen. Die gespeicherte Energie ist dann

$$W = \frac{1}{2}\,C\,U^2 = \frac{1}{2} \times 70 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \times (5000\,\mathrm{V})^2 = 875\,\mathrm{J}.$$

Etwa 200 J dieser gespeicherten Energie werden während 2 ms durch den Patienten geschickt. Dies ist eine Leistung von

$$P = \frac{W}{t} = \frac{200\,\mathrm{J}}{2 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}} = 100\,\mathrm{kW}.$$

4.5 Strom und Widerstand

Obwohl die letzten Abschnitte von Elektrostatik, also von ruhenden Ladungen, handelten, mussten diese Ladungen doch auf die einzelnen Körper übertragen werden. Erinnern Sie sich an den Kondensator, bei dem die Batterie Ladung von der einen Platte zur anderen bewegt. Hierbei war offenbar Ladung in (gerichteter) Bewegung, und dies bezeichnet man als einen elektrischen Strom. Beachten Sie aber, dass bewegte Ladung nicht immer einen Strom bedeutet. Die Leitungselektronen in einem Leiter sind beispielsweise in ständiger Bewegung. Sie flitzen in beliebige Richtungen mit etwa $10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Allerdings findet kein Netto-Transport von Ladung statt. Schließen Sie allerdings eine Batterie an den Leiter an, dann fließt ein gerichteter Strom, der Ladung transportiert. Wenn sich Wasser in einem Schlauch bewegt, dann wird Ladung, nämlich die der Protonen der Wassermoleküle, transportiert. Auch hier spricht man nicht von einem elektrischen Strom, da mit den Protonen auch die Elektronen der Wassermoleküle in die gleiche Richtung fließen. Wegen der Neutralität der Wassermoleküle strömen genauso viele Elektronen wie Protonen durch den Wasserschlauch, so dass wieder kein elektrischer Strom fließt.

4.5.1 Elektrischer Strom

Fließt eine Ladungsmenge $\mathrm{d}q$ durch eine gedachte Fläche in der Zeit $\mathrm{d}t$, dann bezeichnet man als Strom

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{4.23}$$

Der elektrische Strom I gibt also an, wieviel Ladung pro Zeit fließt. Die Einheit des elektrischen Stromes lautet

$$[I] = \text{Ampère} = \mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}. \tag{4.24}$$

Fließt ein Strom I_0 durch eine Zuleitung, die sich an einer Stelle verzweigt, dann gilt

$$I_0 = I_1 + I_2 + \cdots + I_n,$$

falls n die Anzahl der Verzweigungen ist. Dies muss gelten, da die Ladung eine erhaltene Größe ist.

Für die Richtung des Stromflusses verwendet man eine historisch begründete Konvention: Die Stromrichtung wird festgelegt durch die Richtung, in die positive Ladungsträger fließen würden, selbst wenn die eigentlichen Ladungsträger negativ sind und in die entgegengesetzte Richtung fließen.

4.5.2 Widerstand und spezifischer Widerstand

Nehmen Sie sich unterschiedliche Materialien in Form ähnlicher Stäbe her und legen Sie die gleiche Potentialdifferenz an die Enden dieser Stäbe. Sie vermuten, dass dann unterschiedlich große elektrische Ströme resultieren. Die Eigenschaft des Leiters, die hierbei zu Buche schlägt, ist sein elektrischer Widerstand. Man definiert den Widerstand R als

$$R = \frac{U}{I}. \tag{4.25}$$

Die Einheit des Widerstands lautet

$$[R] = \text{Ohm} = \Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}. \tag{4.26}$$

Der elektrische Widerstand ist die Eigenschaft eines Objekts; der spezifische Widerstand hingegen beschreibt die Eigenschaft eines Materials. Beide Größen hängen wie folgt zusammen:

$$R = \varrho \frac{L}{A}. \tag{4.27}$$

Hierin ist ϱ der spezifische Widerstand, L die Länge des Leiters und A die Fläche, durch die der Strom tritt. Die Einheit des spezifischen Widerstands ist

$$[\varrho] = \Omega\,\mathrm{m}. \tag{4.28}$$

Die folgende Tabelle gibt Ihnen den Wert für ϱ für unterschiedliche Materialien an.

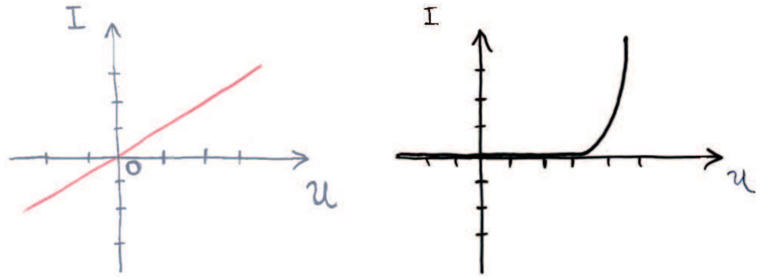


Abbildung 4.11: Strom-Spannung-Charakteristik für einen Ohmschen Widerstand (links) und eine Halbleiterdiode (rechts).

Material	ϱ (Ω m)
Silber	$1{,}62 \times 10^{-8}$
Kupfer	$1{,}69 \times 10^{-8}$
Eisen	$9{,}68 \times 10^{-8}$
Silizium	$2{,}5 \times 10^{3}$
Glas	$10^{10} - 10^{14}$

4.5.3 Das Ohmsche Gesetz

Im Folgenden nennen wir die Potentialdifferenz, die wir an die Enden eines Leiters anlegen, der Einfachheit halber Spannung. Leitende Materialien wie Kupfer, Silber oder Gold zeigen ein lineares Steigen des elektrischen Stromes, wenn man die Spannung an ihren Enden erhöht. Dies ist im linken Bild der Abb. 4.11 illustriert. Beachten Sie insbesondere, dass die Gerade durch den Ursprung führt. Dies bedeutet aber, dass Strom und Spannung zueinander proportionale Größen sind. Nicht alle Bauteile folgen diesem einfachen Gesetz, wie Ihnen die rechte Seite der Abb. 4.11 zeigt. Dies ist die Strom-Spannung-Charakteristik einer Halbleiterdiode, bei der erst dann elektrischer Strom fließt, wenn ein bestimmter Spannungsschwellwert überschritten ist. Für Leiter gilt das Ohmsche Gesetz:

$$I \propto U \Leftrightarrow R = \frac{U}{I} = \text{const.} \tag{4.29}$$

Objekte, die das Ohmsche Gesetz erfüllen, heißen Ohmsche Widerstände. Wir können das Ohmsche Gesetz auch so formulieren:

> Ein leitendes Bauteil gehorcht dem Ohmschen Gesetz, wenn sein Widerstand unabhängig von der Größe und Polarität der angelegten Spannung ist.

Beachten Sie, dass häufig behauptet wird, dass $U = R\,I$ das Ohmsche Gesetz sei. Dies ist nicht richtig, da letztere Gleichung lediglich den elektrischen Widerstand definiert. Diese Gleichung gilt also für alle Leiter, ob sie nun das Ohmsche Gesetz befolgen oder nicht. Beachten Sie weiter, dass das Ohmsche Gesetz nur für einen gewissen Bereich von Spannungen gilt. Werden die Spannungen zu groß, dann findet man Abweichungen vom Ohmschen Gesetz.

4.5.4 Elektrische Leistung

An den Enden eines Leiters liege die Spannung U. Ladung fließt gemäß unserer Konvention vom postiven zum negativen Pol, also in Richtung kleiner werdenden Potentials. Für die Ladung $\mathrm{d}q = I\,\mathrm{d}t$ verrichtet das elektrische Feld die Arbeit

$$\mathrm{d}W = U\,\mathrm{d}q = U\,I\,\mathrm{d}t.$$

Das Prinzip von der Erhaltung der Energie sagt uns, dass dieses Sinken der elektrischen potentiellen Energie verbunden sein muss mit einem Transfer von Energie in eine andere Form. Die Rate dieses Transfers gibt die elektrische Leistung P an:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = U\,I. \tag{4.30}$$

Für einen Ohmschen Widerstand der Größe R kann man schreiben:

$$P = R\,I^2 = \frac{U^2}{R}. \tag{4.31}$$

Wir können uns den Weg eines Elektrons durch einen Widerstand in etwa vorstellen wie das Sinken eines Steins im Wasser bei konstanter Sinkgeschwindigkeit. In beiden Fällen nimmt die potentielle Energie ab - im einen Fall ist es die elektrische potentielle Energie des Elektrons, im anderen Fall die potentielle Energie der Lage des Steins. Die mittlere kinetische Energie des Elektrons bleibt konstant, und die verlorene elektrische potentielle Energie tritt als thermische Energie im Widerstand auf. Mikroskopisch gesehen, stößt das Elektron mit den Atomen des Widerstands zusammen und erwärmt ihn dadurch. Man sagt, dass die mechanische Energie in thermische umgewandelt oder dissipiert wird. Auf diese Weise funktionieren Ihr Toaster oder Ihre Glühbirnen.

4.6 Elektrolyse

Sie kennen bereits eine Wirkung des elektrischen Stroms, nämlich die Wärmeentwicklung bei stromdurchflossenen Leitern mit endlichem ohmschen Widerstand. Diese Wirkung ist etwa beim Toaster, beim Fön oder beim Tauchsieder durchaus erwünscht. Eine weitere Wirkung, die wir jetzt besprechen werden, ist die sogenannte Elektrolyse. Hierbei sind die Ladungsträger nicht länger Elektronen in einem metallischen Leiter sondern beispielsweise Ionen eines Salzes in wässriger Lösung.

Betrachten Sie Abb. 4.12: Sie erkennen die Skizze eines Gefäßes mit einer wässrigen Kochsalzlösung. Man nennt diese Lösung bisweilen auch einen Elektrolyten. In die Lösung sind links und rechts jeweils eine Elektrode eingetaucht, die mit dem positiven und negativen Pol einer Batterie verbunden sind. Man nennt die positive Elektrode die Anode und die negative Elektrode die Kathode. Gelöst im Wasser, dissoziiert der Kochsalzkristall in positive Natrium- und negative Chlor-Ionen. Man nennt die Na^+-Ionen auch Kationen, weil sie von der Kathode angezogen werden; die Cl^--Ionen heißen Anionen, weil sie zur Anode bewegt werden. Sie erkennen, dass diese Ionenwanderung mit einem Ladungstransport verbunden ist. Damit ist die größere Leitfähigkeit der Lösungen gegenüber der des reinen (destillierten) Wassers verständlich. Wir merken uns: *Die elektrische Leitung durch Flüssigkeiten beruht auf Ionenwanderung. Positive und negative Ionen wandern in entgegengesetzte Richtung. Den Vorgang der Ionenwanderung* *im elektrischen Feld und die damit verbundenen stofflichen Veränderungen bezeichnet man als Elektrolyse.*

Michael Faraday hat sich um 1830 ebenfalls mit der Elektrolyse beschäftigt. Er erhielt folgende Ergebnisse. Führt man eine Elektrolyse in einem festen Zeitintervall ($t = \text{const}$) durch, dann ist die Masse des an einer Elektrode abgeschiedenen Materials proportional zum Strom, also

$$m \sim I. \tag{4.32}$$

Bei konstanter Stromstärke ($I = \text{const}$) fand er, dass die Masse abgeschiedenen Materials zur Dauer der Elektrolyse proportional ist, also

$$m \sim t. \tag{4.33}$$

Aus beiden Befunden erhielt er

$$m \sim I\,t = Q, \tag{4.34}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition des Stromes, nämlich $I = \frac{Q}{t}$ verwendet haben. Wir formulieren:

> **Erstes Faradaysches Gesetz.** Die Masse m eines aus einem Elektrolyten abgeschiedenen Stoffes ist der transportierten elektrischen Ladung Q proportional:
>
> $$m = \alpha\,Q. \tag{4.35}$$
>
> Die Proportionalitätskonstante α heißt das elektrochemische Äquivalent und ist für unterschiedliche Stoffe verschieden.

Wir dividieren α jetzt durch die relative Atommasse (also $\frac{m}{n}$, worin n die Anzahl der Mole bezeichnet) der abgeschiedenen Substanz und erhalten:

$$\frac{\alpha}{\frac{m}{n}} = \frac{m}{Q}\,\frac{n}{m} = \frac{n}{Q}. \tag{4.36}$$

Dieser Quotient ist gleich für alle Substanzen mit gleicher Wertigkeit, wobei wir unter Wertigkeit die Ladungszahl der Ionen verstehen (Na und Cl sind beispielsweise einwertig, weil die zugehörigen Ionen im Elektrolyten einfach positiv bzw. einfach negativ geladen sind). Multipliziert man daher obigen Quotienten noch mit der Wertigkeit z, dann erhält man einen für alle Stoffe gleich großen Quotienten. Diese Erkenntnis gibt Anlass zur Formulierung eines weiteren Gesetzes.

> **Zweites Faradaysches Gesetz.** Unabhängig von der chemischen Natur eines aus einem Elektrolyten abgeschiedenen z-wertigen Stoffes wird bei Ausscheidung der Stoffmenge n an einer Elektrode die Ladung
>
> $$Q = n\,z\,\mathrm{F} \tag{4.37}$$
>
> abgegeben oder aufgenommen. Die Faraday-Konstante F besitzt den Wert
>
> $$\mathrm{F} = 9{,}6485 \times 10^4\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{mol}}. \tag{4.38}$$

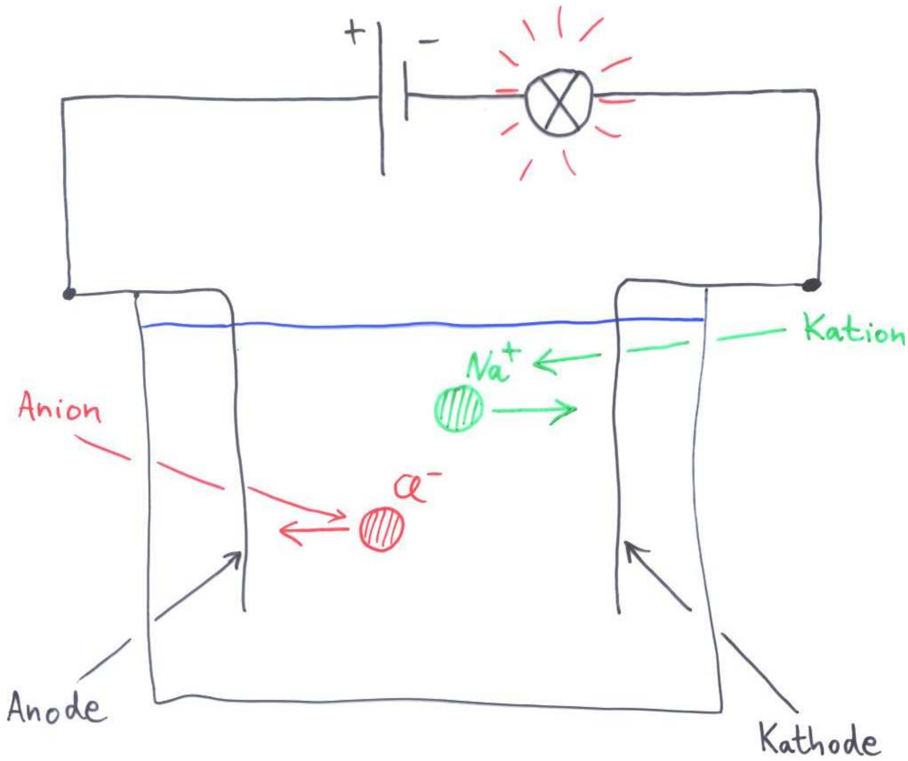


Abbildung 4.12: Prinzip der Elektrolyse: In wässriger Lösung dissoziiert der Kochsalz-Kristall in die Ionen Na^+ und Cl^-, die von der Kathode bzw. der Anode angezogen werden. Dieser Ladungstransport lässt die Glühlampe im Stromkreis leuchten.

Als Anwendung behandeln wir ein Beispiel. Wir fragen, wie lange ein Strom der Stärke $I = 0{,}45\,\mathrm{A}$ fließen muss, damit aus einer $CuCl_2$-Lösung 3,5 g Kupfer abgeschieden werden? Der Elektrolyt besteht also aus einer wässrigen Lösung eines Kupfer-Salzes, nämlich $CuCl_2$. In diesem Salzkristall kommen zwei (einwertige) Chlor-Ionen auf ein Kupfer-Ion, infolgedessen ist Kupfer zweiwertig ($z = 2$). Das elektrochemische Äquivalent von Kupfer beträgt $\alpha = 0{,}329\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{C}}$. Die Masse des abzuscheidenden Kupfers ist auch bekannt, sie beträgt laut Aufgabenstellung $m = 3{,}5\,\mathrm{g}$. Nun gilt:

$$I = \frac{Q}{t} \Leftrightarrow t = \frac{Q}{I}$$

und nach dem Ersten Faradayschen Gesetz

$$Q = \frac{m}{\alpha}.$$

Damit erhalten wir für die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{m}{\alpha\, I} = \frac{3500\,\mathrm{mg}}{0{,}329\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{C}} \times 0{,}45\,\mathrm{A}} \approx 6{,}6\,\mathrm{h}.$$

Die Elektrolyse dauert also etwa 6,6 h.

4.7 Stromkreise

Wenn Sie Ladungen durch einen Stromkreis bewegen wollen, dann müssen Sie für ein elektrisches Feld sorgen, das Arbeit an den Ladungen in den Zuleitungen verrichtet. Eine Möglichkeit bestände darin, einen geladenen Kondensator mit den Enden des Stromkreises zu verbinden. Diese Methode hat allerdings den Nachteil, dass sich der Kondensator mit der Zeit entlädt und damit das elektrische Feld auf Null absinkt. Wir benötigen also eine Batterie, die die Potentialdifferenz zwischen ihren Klemmen für lange Zeit aufrecht erhalten kann. Man sagt, dass die Batterie die elektromotorische Kraft bereitstellt. Weitere Apparate für elektromotorische Kraft sind der elektrische Generator oder die Solarzelle. Wir merken uns, dass die elektromotorische Kraft Arbeit an den im Stromkreis fließenden Ladungsträgern verrichtet.

4.7.1 Arbeit, Energie und elektromotorische Kraft

Die Funktionsweise der elektromotorischen Kraft, die wir im Folgenden mit einem geschwungenen $\mathcal{E}$ bezeichnen werden, zeigt Ihnen Abb. 4.13. Zur Aufrechterhaltung der Potentialdifferenz zwischen ihren Klemmen muss die elektromotorische Kraft postive Ladungsträger von ihrem Minuspol zum Pluspol pumpen. Dazu muss Arbeit verrichtet werden, da die positive Ladung ja in die Richtung größer werdenden Potentials verschoben wird. Dies kann auf chemischem Weg in der Batterie geschehen oder durch Sonneneinstrahlung in der Solarzelle oder durch mechanische Arbeit im elektrischen Generator. Wird die Arbeit $\mathrm{d}W$ an der Ladung $\mathrm{d}q$ verrichtet, dann definiert man die elektromotorische Kraft als

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}. \tag{4.39}$$

Die Einheit ist

$$[\mathcal{E}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}. \tag{4.40}$$

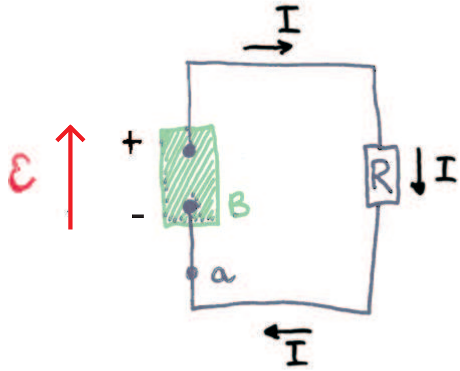


Abbildung 4.13: Die elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ verrichtet Arbeit an den Ladungen und sorgt für einen konstanten Strom im Stromkreis.

Eine ideale Quelle elektromotorischer Kraft besitzt keinen inneren Widerstand, so dass die elektromotorische Krfat gleich der Potentialdifferenz zwischen den Klemmen ist. Eine reale Quelle elektromotorischer Kraft hingegen besitzt einen internen Widerstand, so dass die Potentialdifferenz zwischen ihren Klemmen bei angeschlossenem Stromkreis kleiner ist als $\mathcal{E}$.

4.7.2 Berechnung des Stroms in einem einmaschigen Stromkreis

Im Titel dieses Abschnitts soll einmaschig bedeuten, dass der Strom nur entlang eines einzelnen Pfades fließen kann. Wir betrachten wieder den Stromkreis in Abb. 4.13, wobei die Batterie B eine ideale im obigen Sinne sei. Es gibt zwei verschiedene Wege, wie man den Strom in diesem Stromkreis berechnen kann: die erste Methode ist die Energiemethode, die zweite nennt man die Potentialmethode.

Energiemethode

Die Batterie mit der elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}$ verrichtet an der Ladung $\mathrm{d}q$ die Arbeit

$$\mathrm{d}W = \mathcal{E}\,\mathrm{d}q = \mathcal{E}\,I\,\mathrm{d}t.$$

Diese Arbeit ist nach dem Energieerhaltungssatz gleich der am Widerstand der Größe R abgegebenen Wärme, also

$$\mathcal{E}\,I\,\mathrm{d}t = I^2\,R\,\mathrm{d}t.$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \tag{4.41}$$

Potentialmethode

Wir formulieren zunächst die

> **Kirchhoffsche Maschenregel.** Die algebraische Summe von Potentialänderungen bei einem kompletten Durchlauf einer Masche ist Null.

Für Bergsteiger ist diese Maschenregel klar: nehmen Sie an, dass Sie Station auf einer Hütte machen. Eine Tagestour führt Sie zu mehreren höher gelegenen Gipfeln, aber auch hinunter zu prächtigen Gletscherseen. Am Abend kehren Sie zu Ihrer Hütte zurück. Da die Hütte nach wie vor auf gleicher Höhe steht, ist die Summe aller Ihrer gewanderten Höhenunterschiede gleich Null. Im elektrischen Stromkreis ist es ähnlich, allerdings herrscht hier das elektrische Potential und nicht das Gravitationspotential. Probieren wir also die Maschenregel am Stromkreis in Abb. 4.13 aus, indem wir, getarnt als positiver Ladungsträger, unsere Rundreise am Punkt a im Uhrzeigersinn starten. Das elektrische Potential sei hier U_a. Dann laufen wir an der Quelle elektromotorischer Kraft vorbei - wir erleben einen Zuwachs der potentiellen Energie um $+\mathcal{E}$. Die Zuleitungen nehmen wir als widerstandfrei an, so dass wir keine potentielle Energie verlieren. Im Widerstand allerdings geht die potentielle Energie $I\,R$ verloren. Am Punkt a zurückgekehrt nehmen wir das Potential U_a wieder an. Wir haben also insgesamt:

$$U_a + \mathcal{E} - I\,R = U_a \Leftrightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Dieses Ergebnis kommt Ihnen von der Energiemethode bekannt vor. Wären wir die Rundreise gegen den Uhrzeigersinn gelaufen, dann hätten wir

$$-\mathcal{E} + I\,R = 0$$

gefunden, das am Endresultat nichts ändert. Beherzigen Sie noch die folgenden Merkregeln:

> **Widerstandsregel.** Durchlaufen Sie einen Widerstand in der Richtung des fließenden Stroms, dann ändert sich das elektrische Potential um $-I\,R$; in der umgekehrten Richtung beträgt die Änderung $+I\,R$.
>
> **EMK-Regel.** Durchlaufen Sie eine Quelle elektromotorischer Kraft (EMK) in Richtung der EMK, dann ist die Änderung des Potentials $+\mathcal{E}$; in der entgegengesetzten Richtung ist die Änderung $-\mathcal{E}$.

4.7.3 Weitere einmaschige Stromkreise

Wir betrachten zunächst eine reale EMK-Quelle.

Innerer Widerstand

Jede reale Batterie besitzt einen inneren Widerstand, durch den die Ladungsträger fließen müssen und infolgedessen potentielle Energie verlieren. Auf der linken Seite der Abb. 4.14 sehen Sie einen Stromkreis mit realer EMK-Quelle. Sie sehen, dass man die reale EMK-Quelle sich zusammengesetzt denken kann aus einer idealen EMK-Quelle und einem internen Widerstand R_i. Kirchhoffs Maschenregel ergibt:

$$\mathcal{E} - I\,R_i - I\,R = 0 \Leftrightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R}. \tag{4.42}$$

Die rechte Seite der Abb. 4.14 illustriert den Potentialverlauf im Stromkreis, der hier zur Verdeutlichung zu einer geraden Linie auseinandergezogen wurde.

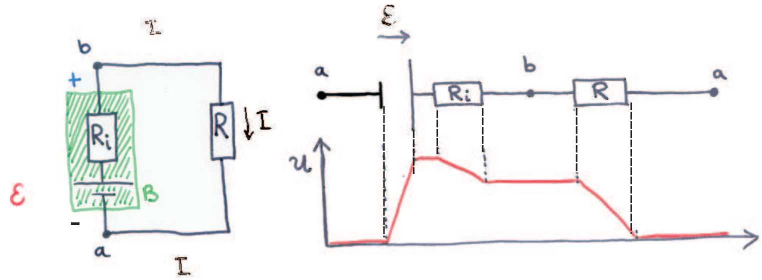


Abbildung 4.14: Eine reale EMK-Quelle besitzt einen inneren Widerstand.

Reihenschaltung von Widerständen

Nehmen wir an, dass in einem Stromkreis mit idealer EMK-Quelle drei Widerstände in Reihe geschaltet seien. Dies bedeutet, dass die Widerstände hintereinander zwischen zwei Punkten verkabelt sind. An den zwei Punkten liegt dann die Potentialdifferenz der EMK-Quelle an. Sie sehen sofort ein, dass der Strom durch alle drei Widerstände der gleiche sein muss. Nach Kirchhoffs Maschenregel ergibt sich außerdem, dass die gesamte Potentialdifferenz sich als Summe aus den Potentialdifferenzen an den einzelnen Widerständen ergibt. Wir suchen jetzt die Größe R eines Ersatzwiderstands, der anstelle der Dreierkombination verwendet werden kann. Dazu schreiben wir auf, was wir wissen:

$$I = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3}$$

und

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

Damit haben wir

$$R\,I = (R_1 + R_2 + R_3)\,I \Leftrightarrow R = R_1 + R_2 + R_3.$$

Der Gesamtwiderstand R ergibt sich bei der Reihenschaltung von Widerständen aus der Summe der einzelnen Widerstände. Sind allgemein N Widerstände der Größen $R_i (i = 1 \ldots N)$ in Reihe geschaltet, dann lautet der Gesamtwiderstand:

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i. \tag{4.43}$$

Sie sehen also, dass der Ersatzwiderstand größer als jeder einzelne Widerstand ist.

4.7.4 Potentialdifferenzen

Betrachten Sie noch einmal den Stromkreis in Abb. 4.14. Wie groß ist die Potentialdifferenz zwischen den Punkten a und b? Zur Beantwortung der Frage starten wir am Punkt b und durchlaufen die Masche im Uhrzeigersinn. Dann erhalten wir

$$U_b - I\,R = U_a \Leftrightarrow U_b - U_a = I\,R.$$

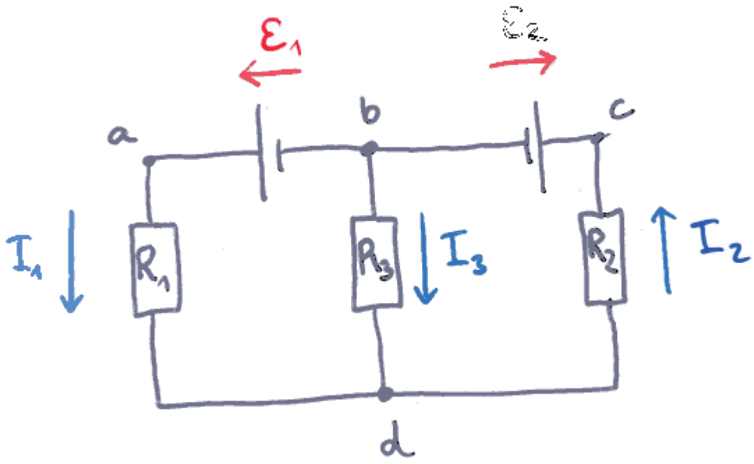


Abbildung 4.15: Zweimaschiger Stromkreis.

Weiter oben haben wir gesehen, dass $I = \frac{\mathcal{E}}{R_i+R}$ gilt, also haben wir schließlich

$$U_b - U_a = \mathcal{E}\,\frac{R}{R_i + R}. \tag{4.44}$$

Die Potentialdifferenz $U_b - U_a$ ist die Potentialdifferenz, die die EMK-Quelle an ihren Klemmen aufrecht erhält. Ist der innere Widerstand der EMK-Quelle gleich Null ($R_i = 0$), dann ist diese Potentialdifferenz sogar gleich der EMK.

4.7.5 Mehrmaschige Stromkreise

Betrachten Sie als ein Beispiel für einen zweimaschigen Stromkreis Abb. 4.15. Die Stellen b und d bezeichnet man als Knoten des Stromkreises; von jedem einzelnen Knoten gehen drei Zweige der Zuleitungen aus. Wir fragen, wie groß die Ströme in diesen Zweigen ist. Beachten Sie, dass in Abb. 4.15 die Richtung der Ströme I_1, I_2 und I_3 willkürlich gewählt wurde. In der Masche bad besitzt der Strom I_1 überall den gleichen Wert; I_2 besitzt in der Masche bcd überall den gleichen Wert; der Strom I_3 fließt durch den Zweig bd. Im Knoten d kommen die Ströme I_1 und I_3 an, während I_2 von diesem Knoten wegfließt. Wegen der Ladungserhaltung muss gelten:

$$I_1 + I_3 = I_2.$$

Wir formulieren diese Erkenntnis allgemein als die

> **Kirchhoffsche Knotenregel.** Die Summe aller an einem Knoten eintreffenden Ströme muss gleich der Summe aller von diesem Knoten auslaufenden Ströme sein.

Damit haben Sie die beiden Regeln zur Berechnung von Stromkreisen in der Hand: die Kirchhoffsche Maschenregel, die auf der Energieerhaltung begründet ist, und die Kirchhoffsche Knotenregel, die die Ladungserhaltung widerspiegelt. Obige Gleichung ist die Verknüpfung dreier Unbekannter. Um sie vollständig zu lösen, benötigen wir zwei weitere Gleichungen, in denen diese Unbekannten vorkommen. Dazu verwenden wir die Maschenregel. Als mögliche Maschen

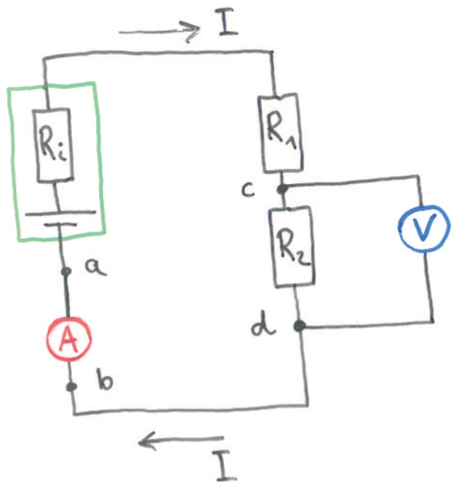


Abbildung 4.16: Strom- und Spannungsmesser im Stromkreis.

kommen in Frage: badb, bcdb oder badcb. Welche dieser Maschen Sie verwenden, spielt keine Rolle. Für die linke Masche gilt (gegen den Uhrzeigersinn):

$$\mathcal{E}_1 - I_1\, R_1 + I_3\, R_3 = 0.$$

Für die rechte Masche haben wir (wieder gegen den Uhrzeigersinn):

$$-I_3\, R_3 - I_2\, R_2 - \mathcal{E}_2 = 0.$$

Mit diesen Gleichungen können Sie nun die unbekannten Ströme bestimmen. Probieren Sie's!

Parallelschaltung von Widerständen

Wir betrachten als Beispiel die Parallelschaltung dreier Widerstände mit den Größen R_1, R_2 und R_3. Diese Schaltung bedeutet, dass sowohl die eine wie die andere Seite der Widerstände direkt miteinander verbunden wird. Alle drei Widerständen erfahren somit dieselbe Potentialdifferenz U an ihren Enden. Wir fragen jetzt nach einem Ersatzwiderstand R, der diese Parallelkombination so ersetzt, dass an ihm dieselbe Potentialdifferenz anliegt und durch ihn derselbe Strom I fließt wie durch alle drei Widerstände zusammen. Es gilt

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U}{R_2} \qquad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

und

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Damit ergibt sich:

$$I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) U,$$

so dass wir für den gesuchten Widerstand R erhalten:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Hat man allgemein N Widerstände R_i parallel geschaltet, dann findet man für den Gesamtwiderstand R:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}. \tag{4.45}$$

Sie sehen insbesondere, dass der Ersatzwiderstand kleiner als der kleinste parallel geschaltete Widerstand ist.

4.7.6 Ampèremeter und Voltmeter

Zum Abschluss des Abschnitts über Stromkreise stellen wir kurz die Geräte vor, mit denen der Strom und die Spannung im Stromkreis gemessen werden (betrachten Sie dazu auch Abb. 4.16). Zum Einbau des Strommessgeräts (Ampèremeter, Kreis mit eingesetztem A in Abb. 4.16) muss der Stromkreis aufgetrennt werden. Der Strom im Stromkreis fließt dann durch das Ampèremeter. Es ist wichtig, dass der Widerstand des Ampèremeters sehr klein ist, so dass dieses Gerät den Strom im Stromkreis möglichst ungestört lässt. Um die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten im Stromkreis zu messen, benötigt man ein Spannungsmessgerät (Voltmeter, Kreis mit eingesetztem V in Abb. 4.16). Dazu werden die Klemmen des Voltmeters zwischen die Punkte des Stromkreises gelegt, ohne dass die Zuleitungen im Stromkreis aufgetrennt werden. Für ein Voltmeter ist es wichtig, dass der Innenwiderstand sehr groß ist, so dass kein nennenswerter Strom durch das Voltmeter fließen kann.

4.8 Magnetische Felder

In den vergangenen Abschnitten haben Sie gelernt, dass ein elektrisch geladenes Objekt den Raum um sich mit einem elektrischen Feld füllt. Auch ein Magnet ist von einem Vektorfeld umgeben - dies ist das magnetische Feld $\vec{B}$. Aus dem Alltag kennen Sie Permanentmagneten oder Elektromagneten. Da Sie wissen, dass das elektrische Feld seinen Ursprung in elektrischer Ladung hat, können Sie annehmen, dass das magnetische Feld auf magnetische Ladung zurückzuführen ist. Solche magnetischen Monopole werden zwar von manchen Theorien vorhergesagt, allerdings wurden solche Monopole experimentell noch nicht entdeckt. Daher stellt sich die Frage, wie magnetische Felder entstehen. Es gibt zwei Möglichkeiten: (a) Bewegte elektrische Ladungen produzieren ein magnetisches Feld; (b) manche Teilchen, wie etwa das Elektron, besitzen ein intrinsisches magnetisches Feld (dieses intrinsische Feld ist also eine Eigenschaft dieser Teilchen, ähnlich wie deren Masse oder elektrische Ladung). In diesem Abschnitt werden wir das magnetische Feld über die Kraft charakterisieren, die es auf bewegte Ladung ausübt.

4.8.1 Die Definition des magnetischen Feldes

Das elektrische Feld haben wir definiert, indem wir eine Probeladung in die Umgebung der das elektrische Feld erzeugenden Ladung gebracht haben und die Kraft $\vec{F}_E$ (nach Betrag und Richtung) auf die Probeladung an jedem Punkt gemessen haben. Für das magnetische Feld müssen wir uns eine andere Definition ausdenken, da wir keine magnetische Probeladung zur Verfügung haben. Wir werden ein Teilchen mit vorgegebener elektrischer Ladung und Geschwindigkeit durch ein magnetisches Feld bewegen und die Kraft $\vec{F}_B$ auf dieses Teilchen ermitteln. Man findet:

$$\vec{F}_B = q\,\vec{v} \times \vec{B}, \tag{4.46}$$

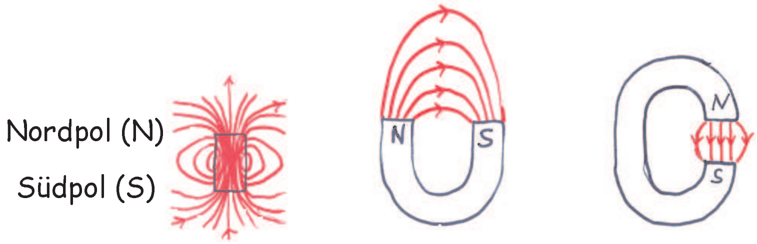


Abbildung 4.17: Beispiele für magnetische Feldlinien: Die Richtung verläuft vom Nord- zum Südpol, die Linien bilden geschlossene Schleifen.

worin $\vec{v}$ die Geschwindigkeit und q die elektrische Ladung des Teilchens bedeuten. Man nennt $\vec{F}_B$ auch die Lorentz-Kraft. Da es sich um ein Kreuzprodukt von Vektoren handelt, können Sie die Richtung der Lorentz-Kraft mit Hilfe der Rechten-Hand-Regel ermitteln: für eine positive Ladung halten Sie den Daumen Ihrer rechten Hand in die Richtung der Geschwindigkeit (Ursache), den Zeigefinger biegen Sie in die Richtung des magnetischen Feldes (Vermittlung), dann gibt Ihnen der Mittelfinger die Richtung der Lorentz-Kraft an (Wirkung). Für eine negative Ladung zeigt die Lorentz-Kraft in die dem ausgestreckten Mittelfinger entgegengesetzte Richtung. Sie sehen mit Hilfe der Eigenschaften des Kreuzproduktes auch, dass im Falle einer sich entlang des Magnetfeldes bewegenden Ladung keine Lorentz-Kraft auftritt. Weiter steht die Lorentz-Kraft immer senkrecht auf der vom Feld und der Geschwindigkeit aufgespannten Ebene. Dies bedeutet insbesondere, dass die Lorentz-Kraft senkrecht auf der Geschwindigkeit des Teilchens steht, so dass sie den Betrag der Geschwindigkeit nicht ändern kann.

Die Einheit des magnetischen Feldes ist

$$[B] = \text{Tesla} = \frac{\text{N}}{\text{A m}}. \tag{4.47}$$

Die Größe des Erdmagnetfeldes auf der Oberfläche der Erde ist etwa $10^{-4}\,\text{T}$.

Ähnlich wie das elektrische Feld können wir auch das magnetische Feld mit Hilfe von Feldlinien veranschaulichen. Es gelten beim Zeichnen dieselben Regeln wie beim elektrischen Feld, d. h. die Tangente an einem Punkt der Feldlinie gibt die Richtung von $\vec{B}$ vor, und je dichter die Feldlinien gezeichnet werden, desto stärker ist das magnetische Feld. Abbildung 4.17 zeigt Ihnen die magnetischen Feldlinien einiger Magnete. Sie sehen vor allem, dass die Feldlinien im sogenannten Nordpol entspringen und im Südpol des Magneten enden. Weiter fällt Ihnen am linken Beispiel des Stabmagneten auf, dass die Feldlinien auch duch den Magneten verlaufen und immer geschlossene Schleifen bilden. Wir halten fest, dass sich gleichnamige magnetische Pole abstoßen und ungleichnamige anziehen.

4.8.2 Die Entdeckung des Elektrons

Wir bauen eine Apparatur, die es erlaubt, ein elektrisches und ein magnetisches Feld derart zu erzeugen, dass die Feldlinien senkrecht aufeinander stehen (siehe Abb. 4.18). Man spricht in einem solchen Fall von gekreuzten Feldern. Die elektrischen Feldlinien weisen in Abb. 4.18 von oben nach unten (Plattenkondensator), währen die magnetischen Feldlinien in die Zeichenebene hinein zeigen (angedeutet durch Kreuze). Ein ähnliches Gerät hat J. J. Thomson verwendet und

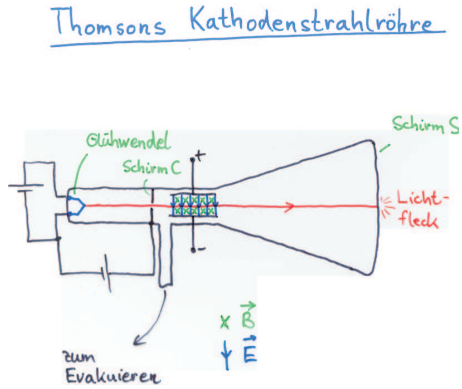


Abbildung 4.18: Thomsons prinzipieller Versuchsaufbau, der zur Entdeckung des Elektrons geführt hat.

1897 das Elektron entdeckt - damals hieß dieses Gerät Kathodenstrahlröhre. Geladene Teilchen werden von dem heißen Glühdraht emittiert und im elektrischen Feld einer Spannungsquelle auf einen Schirm C beschleunigt. Dieser hat eine kleine Öffnung, durch die dann ein Strahl geladener Teilchen tritt und schließlich durch den Bereich gekreuzter Felder fliegt. Je nach Größe der Felder kann man den Strahl unterschiedlich stark ablenken. Der abgelenkte Strahl verrät sich durch einen Lichtpunkt am Schirm S. Das elektrische Feld des Kondensators wird negativ geladene Teilchen nach oben ablenken; die Richtung des magnetischen Feldes bewirkt eine Lorentz-Kraft für negativ geladene Teilchen nach unten (Rechte-Hand-Regel). Damit sind Thomsons Versuchsschritte klar vorgegeben:

- Für $E = 0$ und $B = 0$ bestimmt er den Ort des Lichtpunkts auf dem Schirm S für den unabgelenkten Strahl.
- Das elektrische Feld $\vec{E}$ wird eingeschaltet und die resultierende Ablenkung ermittelt.
- Bei beibehaltenem $\vec{E}$-Feld schaltet Thomson das Magnetfeld ein und variiert es so lange, bis der Strahl wieder zur unabgelenkten Position kommt.

Die Ablenkung eines geladenen Teilchens im homogenen Feld eines Kondensators haben Sie schon kennengelernt - erinnern Sie sich an den Ink-Jet-Drucker! Dort haben wir gefunden, dass die Ablenkung

$$y = \frac{q\,E\,L^2}{2\,m\,v^2}$$

ist, wenn q die Ladung des Teilchens, E das elektrische Feld, L die zu durchfliegende Strecke im Plattenkondensator, m die Masse des Teilchens und v seine Geschwindigeit ist. Im dritten Versuchsschritt stellt man das magnetische Feld so ein, dass es die Wirkung des elektrischen Feldes aufhebt. Die Lorentz-Kraft und die elektrische Kraft halten sich also die Waage:

$$q\,E = q\,v\,B \Leftrightarrow v = \frac{E}{B}.$$

Beachten Sie, dass wir hier den Betrag der Lorentz-Kraft notiert haben, wobei wir verwendet haben, dass das $\vec{B}$-Feld senkrecht zur Geschwindigkeit des Teilchens gerichtet ist ($\sin 90^\circ = 1$). Damit erhalten wir schließlich:

$$\frac{q}{m} = \frac{2\,y\,E}{B^2\,L^2}.$$

Dieses Verhältnis $\frac{q}{m}$ (spezifische Ladung) hat Thomson in seinem Versuch ermittelt und behauptet, dass Teilchen mit diesem Verhätnis in jedweder Materie zu finden seien und dass sie leichter seien als das leichteste bekannte Atom (Wasserstoff).

4.8.3 Geladene Teilchen auf einer Kreisbahn

Schicken Sie etwa einen Strahl von Elektronen durch ein homogenes magnetisches Feld, das senkrecht zur Geschwindigkeit der Elektronen gerichtet ist, dann wirkt die resultierende Lorentz-Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit. Dies bedeutet aber, dass die Elektronen auf eine Kreisbahn gezwungen werden. Wir können einige charakteristische Größen für diese Kreisbewegung bestimmen. Ausgangspunkt ist die Erkenntnis, dass die zur Kreisbahn erforderliche Zentripetalkraft durch die Lorentz-Kraft gegeben ist, also

$$q\,v\,B = m\,\frac{v^2}{r}. \tag{4.48}$$

Damit können wir direkt den Radius der Kreisbahn ermitteln:

$$r = \frac{m\,v}{q\,B}.$$

Die Periodendauer lautet:

$$T = \frac{2\,\pi\,r}{v} = \frac{2\,\pi}{v}\,\frac{m\,v}{q\,B} = \frac{2\,\pi\,m}{q\,B}.$$

Damit ist die zugehörige Frequenz:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{q\,B}{2\,\pi\,m}.$$

Schließlich notieren wir noch die Kreisfrequenz:

$$\omega = 2\,\pi\,f = \frac{q}{m}\,B.$$

Interessanterweise hängen T, f und ω nicht von der Geschwindigkeit der Teilchen ab - stattdessen zeigen Teilchen mit derselben spezifischen Ladung $\frac{q}{m}$ dieselbe Periodendauer.

Falls das geladene Teilchen sich nicht senkrecht zum Magnetfeld bewegt, sondern eine Geschwindigkeitskomponente parallel zur Feldrichtung hat, dann ist die entsehende Bahn spiralförmig um die Richtung von $\vec{B}$. Nehmen wir an, dass $\vec{v}$ und $\vec{B}$ einen Winkel φ miteinander einschließen, dann gilt für die parallele und orthogonale Komponente der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_{\|} &= v\,\cos\varphi \\ v_{\perp} &= v\,\sin\varphi \end{aligned}$$

Die senkrechte Komponente legt den Radius der Spirale fest, während die parallele Komponente die Ganghöhe der Spirale bestimmt (siehe Abb. 4.19). Das Magnetfeld der Erde ist an den Polen stark inhomogen. Geladene, hochenergetische Teilchen aus dem Weltall werden nicht nur entlang der Magnetfeldlinien auf Spiralbahnen gezwungen, sondern sogar in Polnähe gefangen gehalten (Stichwort: magnetische Flasche).

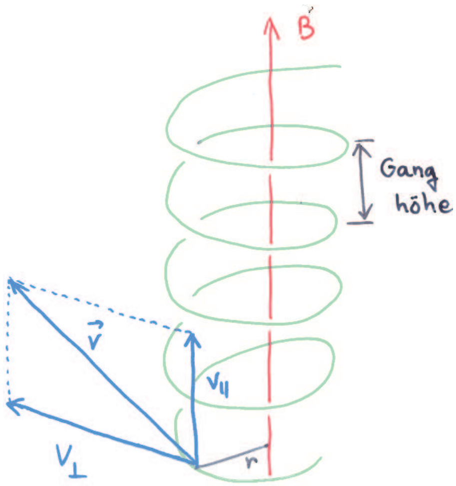


Abbildung 4.19: Spiralförmige Trajektorie eines geladenen Teilchens, dessen Geschwindigkeit $\vec{v}$ nicht senkrecht zum Magnetfeld $\vec{B}$ gerichtet ist.

4.8.4 Magnetische Kraft auf stromdurchflossene Leiter

Wir stellen hier eine einfache Methode vor, um die Stärke eines Magnetfeldes zu bestimmen. Wir lassen elektrischen Strom durch einen geraden Leiter fließen, der sich in einem homogenen Magnetfeld befindet. Das Magnetfeld sei senkrecht zur Stromrichtung orientiert. Ein Strom im Leiter wird eine Kraft erfahren, die ihn seitlich (senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zur Leiterrichtung) auslenkt. Zur Berechnung dieser Kraft nehmen wir uns ein Leiterteilstück der Länge L heraus. In der Zeit Δt fließe durch dieses Stück die Ladung Δq. Damit ist der Strom $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ verknüpft. Nehmen wir eine mittlere Geschwindigkeit v der Ladungsträger an, dann können wir wegen $v = \frac{L}{\Delta t}$ schreiben, dass $\Delta t = \frac{L}{v}$. Damit fließt im Teilstück des Leiters die Ladung $q = \frac{I\,L}{v}$. Auf dieses Ladung wirkt aber die Lorentz-Kraft $F_{\mathrm{B}} = \Delta q\, v\, B = I\, L\, B$. Dieses Ergebnis können wir auf eine beliebige Leiterorientierung relativ zum magnetischen Feld verallgemeinern. Wir führen dazu den Vektor $\vec{L}$ ein, der entlang der Stromrichtung zeigt und dessen Betrag gleich der Länge des Leiters im Magnetfeld ist. Dann gilt für die Kraft auf den Leiter:

$$\vec{F}_{\mathrm{B}} = I\,\vec{L} \times \vec{B}. \tag{4.49}$$

4.8.5 Drehmoment auf Leiterschleife

Betrachten Sie Abb. 4.20. Sie sehen eine stromdurchflossene Leiterschleife im homogenen Feld eines Permanentmagneten. Die Leiterschleife ist drehbar gelagert (siehe die Orientierung der Drehachse in der Abbildung). Mit der Rechten-Hand-Regel finden Sie die Richtungen der auftretenden Kräfte. Schauen wir uns zunächst das obere Leiterstück der Länge a an. Der stromdurchflossene Leiter erfährt hier eine Kraft nach oben. Das gegenüberliegende Stück erfährt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft. Sie sehen, dass dieses Kräftepaar ein Drehmoment auf die Leiterschleife ausübt, das die Schleife im Uhrzeigersinn dreht. Auf das vordere Leiterstück der Länge b wirkt eine Kraft nach vorn, während auf das gegenüberliegende Stück eine gleich große Kraft nach hinten wirkt. Dieses Kräftepaar hebt sich auf und ist für die Bewegung der Leiterschleife irrelevant. Nehmen wir an, dass die Wirkungslinie der Kraft auf das

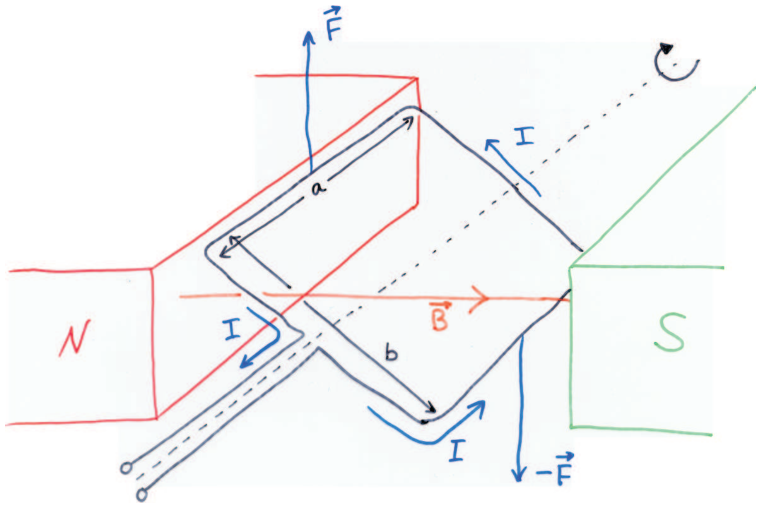


Abbildung 4.20: Leiterschleife im homogenen magnetischen Feld.

Leiterstück der Länge a mit dem Leiterstück der Länge b einen Winkel φ einschließt, dann ist der Hebelarm $\frac{b}{2}\sin\varphi$. Das Drehmoment M', das auf die Schleife wirkt, ist dann

$$M' = F\,\frac{b}{2}\,\sin\varphi + F\,\frac{b}{2}\,\sin\varphi.$$

Die Kraft kennen wir aus dem vorigen Abschnitt, nämlich $F = I\,a\,B$, so dass wir erhalten

$$M' = I\,a\,b\,B\,\sin\varphi.$$

Ist der Leiter aus N übereinander gelegten Leiterschleifen aufgebaut, dann lautet das Drehmoment M:

$$M = N\,M' = N\,I\,A\,B\,\sin\varphi, \tag{4.50}$$

wobei wir mit $A = a\,b$ die Fläche der Leiterschleife bezeichnen. Sie sehen also, dass eine stromdurchflossene Leiterschleife im Magnetfeld ein Drehmoment erfährt und sich infolgedessen dreht. Allerdings verschwindet das Drehmoment für $\varphi = 0°$. Hat sich die Schleife also gestellt, dass die Magnetfeldlinien senkrecht durch ihre Fläche treten, dann endet die Drehbewegung. Um die Drehung der Schleife aufrecht zu erhalten, muss man die Richtung des Stroms im richtigen Moment ($\varphi = 0°, 180°$) ändern. Dies funktioniert mit Wechselstrom, den wir etwas später besprechen werden. Betreiben Sie also eine Leiterschleife im Magnetfeld mit Wechselstrom, dann haben Sie einen Elektromotor.

4.9 Magnetische Felder aufgrund von elektrischen Strömen

4.9.1 Langer dünner Draht

Betrachten Sie einen langen dünnen Draht, der sich zu beiden Seiten unendlich weit erstrecke. Dünn soll hier bedeuten, dass der Radius seines Querschnitts sehr klein gegenüber seiner Länge ist. Fließt nun ein Gleichstrom I durch diesen Leiter, dann bildet sich ein Magnetfeld um den

Leiter: Das Magnetfeld B umschließt den Leiter in Form von konzentrischen Kreisen, durch deren gemeinsamen Mittelpunkt der Leiter verläuft. Das Magnetfeld im Abstand r vom Leiterzentrum lautet

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\,\frac{I}{r}, \tag{4.51}$$

worin μ_0 die Permeabilitätskonstante ist:

$$\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{T\,m}}{\mathrm{A}} \approx 1{,}26 \times 10^{-6}\,\frac{\mathrm{T\,m}}{\mathrm{A}}. \tag{4.52}$$

Die Richtung des Magnetfeldes erhalten Sie mit der Rechten-Hand-Regel: Legen Sie den Daumen Ihrer rechten Hand in die Richtung des Stromes (technische Stromrichtung!), dann ergibt die Krümmung (von den Handwurzelknochen zu den Fingerspitzen) der restlichen Finger der rechten Hand die Richtung des magnetischen Feldes.

4.9.2 Kraft zwischen zwei parallelen Strömen

Betrachten sie zwei dünne, unendlich ausgedehnte parallele Leiter a und b, die einen Abstand d zueinander haben und durch die die Ströme I_a und I_b in gleicher Richtung fließen. Wir fragen nach der Kraft, die auf die Leiter wirkt. Dazu nehmen wir uns ein Teilstück der Länge L des Leiters b her und berechnen die Kraft auf die dort bewegte Ladung im Magnetfeld des Leiters a. Das Magnetfeld des Leiters a am Ort des Leiters b lautet:

$$B_a = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\,\frac{I_a}{d}.$$

Die resultierende Kraft F_{ba} auf den Strom I_b im Leiter b ist dann:

$$F_{ba} = I_b\,L\,B_a,$$

so dass wir schließlich erhalten:

$$F_{ba} = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\,\frac{L}{d}\,I_a\,I_b. \tag{4.53}$$

Wir halten fest, dass parallele Ströme sich anziehen und antiparallele Ströme sich abstoßen. Die Definition der SI-Einheit Ampère beruht auf der Kraft zwischen zweit stromleitenden Drähten: Ein Ampère ist derjenige konstante Strom, der, falls er in zwei geraden, parallelen und langen dünnen Leitern fließt, eine Kraft zwischen den Leitern von 2×10^{-7} N pro Meter Länge erzeugt.

4.9.3 Magnetfeld einer Spule

Wir betrachten das Magnetfeld im Innern einer idealen Spule. Die ideale Spule ist unendlich lang und besteht aus dicht aufeinander gewickelten dünnen Drähten. Im Innern einer stromdurchflossenen idealen Spule herrscht dann ein homogenes magnetisches Feld der Größe

$$B = \mu_0\,I\,n, \tag{4.54}$$

worin n die Wicklungsdichte der Spule ist (Anzahl der Wicklungen pro Längeneinheit).

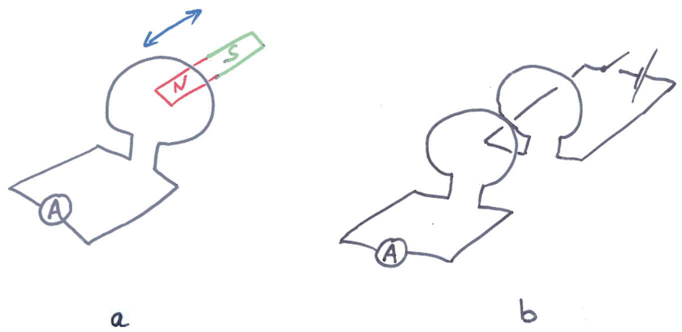


Abbildung 4.21: Zwei Experimente zur Induktion.

4.10 Induktion

Wir wissen bereits, dass eine stromdurchflossene Leiterschleife im Magnetfeld ein Drehmoment erfährt - auf diese Weise funktionieren Elektromotoren. Wenn wir nun eine Leiterschlaufe in einem Magnetfeld bewegen, können wir dann einen elektrischen Strom erzeugen? In diesem Fall hätten wir einen elektrischen Generator zur Hand.

Abbildung 4.21a zeigt einen ersten Versuch zur Induktion: Bewegen Sie einen Stabmagneten auf die Leiterschleife zu, dann wird in der Schleife ein Strom induziert. Bewegen Sie den Magneten von der Schleife weg, dann wird ein Strom mit umgekehrter Richtung induziert. Die Größe des Stroms steigt mit zunehmender Geschwindigkeit des Stabmagneten. In Abb. 4.21b sehen Sie anstatt des Stabmagneten eine weitere Leiterschleife, die der ursprünglichen gegenübergestellt wurde. Schaltet man den Strom in der neuen Leiterschleife ein, dann beobachtet man wieder einen induzierten Strom in der ersten Schleife. Schaltet man den Strom wieder aus, wird ein Strom mit umgekehrter Richtung induziert. Wir wollen im Folgenden die Ursache für diese Erscheinung klären. Dazu halten wir fest:

- Wir erhalten einen induzierten Strom nur, falls sich Magnet und Leiterschlaufe relativ zueinander bewegen.
- Je schneller die Bewegung ist, desto größer ist der induzierte Strom.
- Bewegt sich der Nordpol des Magneten auf die Schleife zu (von der Schleife weg), dann fließt der induzierte Strom im (gegen den) Uhrzeigersinn; bewegt sich der Südpol des Magneten auf die Schleife zu (von der Schleife weg), dann fließt der induzierte Strom gegen den (im) Uhrzeigersinn.

Die Potentialdifferenz, die den induzierten Strom treibt, heisst induzierte EMK oder induzierte Spannung; den gesamten Prozess nennt man Induktion.

4.10.1 Faradaysches Induktionsgesetz

Faradays Idee zur Erklärung obiger Induktionsversuche war, die induzierte EMK mit dem sich ändernden Magnetfeld in Verbindung zu bringen. Wir definieren:

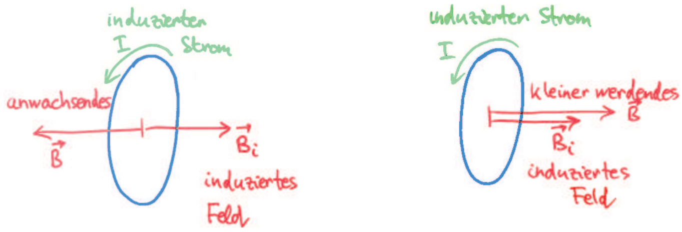


Abbildung 4.22: Illustration zur Lenzschen Regel.

Magnetischer Fluss. Als magnetischen Fluss durch eine Fläche bezeichnet man das Integral

$$\Phi = \int \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{A}. \tag{4.55}$$

Die Einheit des magnetischen Flusses lautet:

$$[\Phi] = \text{Weber} = \text{Wb} = \text{T}\,\text{m}^2. \tag{4.56}$$

Wir werden vorwiegend den Sonderfall betrachten, in dem das Magnetfeld senkrecht durch die Fläche tritt und homogen innerhalb der Fläche ist, dann gilt nämlich für den magnetischen Fluss einfach

$$\Phi = B \cdot A.$$

Faradaysches Induktionsgesetz. Die Größe der induzierten EMK in einer Leiterschleife ist gleich der zeitlichen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife, also

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\dot{\Phi}. \tag{4.57}$$

Das auftretende Minuszeichen werden wir im nächsten Abschnitt erklären. Haben Sie eine Spule mit N Wicklungen, dann ist die induzierte EMK durch $\mathcal{E} = -N\,\dot{\Phi}$ gegeben. Eine zeitliche Änderung von Φ können Sie erreichen durch eine Änderung von B oder A oder des Winkels zwischen $\vec{B}$ und dem Normalenvektor der Fläche A.

4.10.2 Lenzsche Regel

Lenzsche Regel. Die induzierte EMK ist so gepolt, dass ein von ihr erzeugter Strom der Änderung des magnetischen Flusses entgegen wirkt.

Diese Regel verursacht das Minuszeichen im Faradayschen Induktionsgesetz. Betrachten Sie zur Illustration der Lenzschen Regel auch Abb. 4.22.

4.10.3 Induktion und Energietransfer

Biegen Sie einen Draht zu einer Schleife und ziehen Sie diese Schleife so durch ein homogenes Magnetfeld, dass die Magnetfeldlinien senkrecht durch die Fläche der Schleife treten. Welche

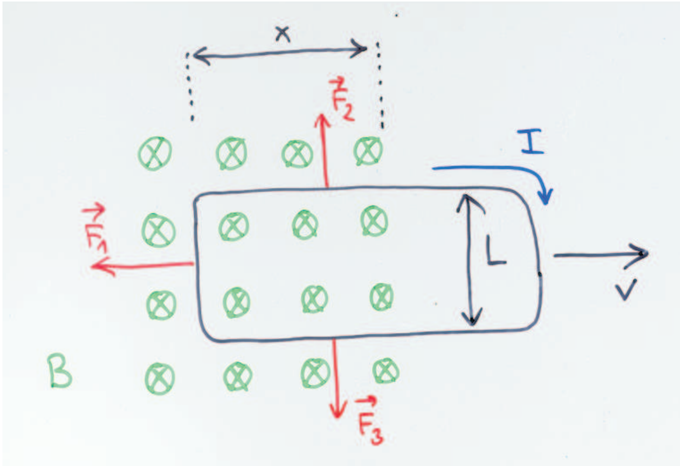


Abbildung 4.23: Berechnung der Leistung beim Bewegen einer Leiterschleife im homogenen Magnetfeld.

Arbeit müssen Sie verrichten und wo geht diese Energie hin? Betrachten Sie zur Berechnung Abb. 4.23. Wenn Sie die Leiterschleife in der angegebenen Richtung durch das Magnetfeld der Stärke B mit der Geschwindigkeit v ziehen, dann wird ein Strom der Stärke I induziert, da die Anzahl der Magnetfeldlinien, die durch die Leiterschleife treten, kleiner wird. Nach der Lenzschen Regel muss der Strom so orientiert sein, dass er dieser Änderung entgegen wirkt. Mit der Rechten-Hand-Regel finden Sie, dass er, wie angegeben, im Uhrzeigersinn fließen muss. Dieser so induzierte Strom erfährt im Magnetfeld aber Kräfte, von denen sich $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ kompensieren; es bleibt die Kraft $\vec{F}_1$, gegen die wir Arbeit verrichten müssen. Es gilt

$$F_1 = I\,L\,B,$$

worin L die angegebene Seitenlänge des Leiters ist. Schreiben wir noch

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R},$$

wobei R den Ohmschen Widerstand des Leiters kennzeichnet, und

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B \cdot A) = -B \cdot \dot{A} = -B\,L\,\dot{x} = -B\,L\,v$$

für die induzierte Spannung, dann erhalten wir

$$F_1 = \frac{B\,L\,v}{R}\,L\,B = \frac{B^2\,L^2\,v}{R}.$$

Also benötigen wir für das Herausziehen der Leiterschleife die mechanische Leistung

$$P = F_1\,v = \frac{B^2\,L^2\,v^2}{R}.$$

Um nun zu finden, wo unsere eingesetzte Leistung bleibt, berechnen wir (mit einer gewissen Vorahnung) die elektrische Leistung P_{el} des stromdurchflossenen Leiters:

$$P_{\mathrm{el}} = I^2\,R = \left(\frac{B\,L\,v}{R}\right)^2 R = \frac{B^2\,L^2\,v^2}{R} = P.$$

Sie sehen, dass die von uns eingesetzte Leistung als Wärme dissipiert wird.

4.10.4 Induktivität

Beim Kondensator haben wir die Größe der Kapazität definiert. Die Kapazität gab in gewisser Hinsicht das Füllvermögen für elektrische Ladung an. Eine stromdurchflossene Spule enthält ein magnetisches Feld - als Kapazität einer Spule könnte man den magnetischen Fluss je elektrischen Strom definieren. So macht man es auch, spricht dann aber von der Induktivität der Spule. Wir definieren

Induktivität. Die Induktivität L einer vom Strom I durchflossenen Spule mit N Wicklungen lautet:

$$L = \frac{N\,\Phi}{I}. \tag{4.58}$$

Die Einheit der Induktivität ist

$$[L] = \mathrm{Henry} = \mathrm{H} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{T\,m^2}}{\mathrm{A}}. \tag{4.59}$$

Betrachten wir als Beispiel eine lange Spule mit Querschnittsfläche A. Als Wicklungsdichte n bezeichnen wir die Anzahl der Wicklungen je Einheitslänge. Dann können wir für den magnetischen Fluss in einem Teilbereich der Länge l schreiben

$$N\,\Phi = n\,l\,B\,A.$$

Da für das Magnetfeld bekannterweise gilt

$$B = \mu_0\,I\,n,$$

erhalten wir für die Induktivität einer langen Spule

$$L = \mu_0\,n^2\,l\,A. \tag{4.60}$$

Vergleichen wir dies mit der Formel für die Kapazität eines Plattenkondensators, also

$$C = \epsilon_0\,\frac{A}{d},$$

dann sehen Sie, dass Induktivität der Spule und Kapazität des Kondensators nur von den geometrischen Daten abhängen.

4.10.5 Selbstinduktion

Eine induzierte EMK $\mathcal{E}_L$ entsteht in jeder Spule, in der sich der Strom ändert. Wie groß ist diese induzierte EMK? Einerseits wissen wir aus dem Faradayschen Induktionsgesetz, dass

$$\mathcal{E}_L = -N\,\dot{\Phi}$$

gilt; andererseits gilt wegen der eben definierten Induktivität

$$N\,\Phi = L\,I.$$

Bringen Sie beide Formeln zusammen, dann erhalten Sie

$$\mathcal{E}_L = -N\,\dot{\Phi} = -L\,\dot{I}. \tag{4.61}$$

Beachten Sie also, dass die in einer Spule induzierte Spannung nicht von der Größe des Stroms, sondern von der Größe seiner zeitlichen Änderung bestimmt wird.

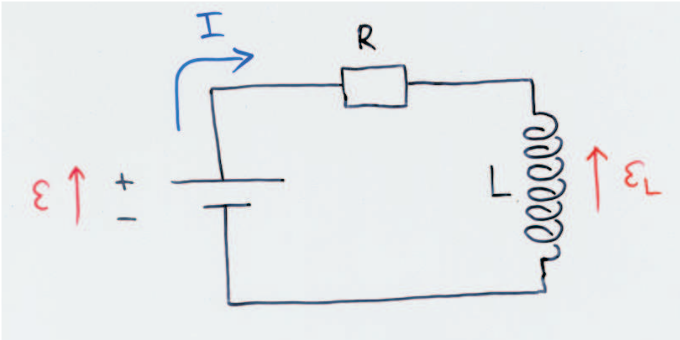


Abbildung 4.24: Speicherung von Energie im magnetischen Feld.

4.10.6 Energie im Magnetfeld

Sie erinnern sich, dass ein geladener Plattenkondensator Energie in seinem Feld speichern kann. Eine Spule kann analog Energie im magnetischen Feld speichern. Betrachten Sie zur Herleitung Abb. 4.24: Sie sehen einen Stromkreis mit einer Batterie der elektromotorischen Kraft $\mathcal{E}$, die einen Strom der Größe I durch den Widerstand R und die Spule der Induktivität L treibt, falls der Schalter S geschlossen ist. Wir betrachten den Stromkreis nur in der Zeit, in der der Strom zu fließen beginnt und damit versucht, in der Spule ein Magnetfeld aufzubauen. In dieser Zeit wird eine EMK $\mathcal{E}_L$ in der Spule induziert, die der Ursache des Magnetfeldaufbaus entgegenwirkt - $\mathcal{E}_L$ ist also der Batterie-EMK $\mathcal{E}$ entgegengesetzt. Damit können wir mit Hilfe von Kirchhoffs Maschenregel, der Widerstandsregel und der EMK-Regel folgende Beziehung aufstellen:

$$\mathcal{E} - I\,R - \mathcal{E}_L = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E} = L\,\dot{I} + I\,R.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir auf beiden Seiten mit dem Strom I, dann erhalten wir:

$$\mathcal{E}\,I = L\,I\,\dot{I} + I^2\,R.$$

Links vom Gleichheitszeichen steht die von der Batterie abgegebene Leistung; der zweite Summand auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist die als Wärme abgegebene Leistung am Widerstand; der erste Summand beschreibt den Energietransfer W_B in das magnetische Feld der Spule. Wir schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}W_\mathrm{B}}{\mathrm{d}t} = L\,I\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

Damit erhalten wir für die im magnetischen Feld gespeicherte Energie:

$$W_\mathrm{B} = \int_0^I L\,I\,\mathrm{d}I = \frac{1}{2}\,L\,I^2. \tag{4.62}$$

Vergleichen Sie diese Formel abschließend noch mit der Formel für die Energie im elektrischen Feld, also

$$W_\mathrm{E} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,q^2.$$

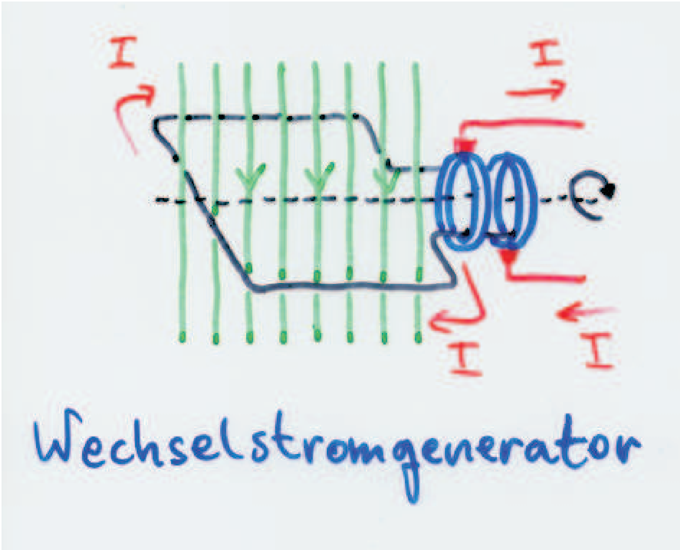


Abbildung 4.25: Elektrischer Generator.

4.11 Wechselstrom

4.11.1 Elektrischer Generator

Wir haben schon das Prinzip des Elektromotors besprochen. Damit sich eine Leiterschleife kontinuierlich in einem homogenen Magnetfeld dreht, muss ein Wechselstrom im richtigen Takt durch den Leiter fließen. Jetzt kehren wir die Situation um: Wieder nehmen wir eine drehbar gelagerte Leiterschleife im magnetischen Feld her, drehen sie jetzt aber etwa mit Hilfe einer Kurbel. An den Enden der Leiterschleife entsteht dann eine Wechselspannung, die man, wie Abb. 4.25 zeigt, abgreifen kann - wir haben einen elektrischen Generator. Im Gegensatz zur Gleichspannung ändert die Wechselspannung periodisch ihre Polarität. Periodische Funktionen können Sie mit Hilfe einer Sinusfunktion darstellen, also schreiben wir für die Spannung

$$U(t) = U_0 \sin(2\,\pi\,f\,t).$$

Hierin ist U_0 die Amplitude und f die Frequenz. Die Wechselspannung führt zu einem Wechselstrom, der nicht notwendigerweise mit der Spannung in Phase ist. Wir schreiben daher allgemein:

$$I(t) = I_0 \sin(2\,\pi\,f\,t + \varphi),$$

worin φ den Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung bedeutet und der im allgemeinen nicht Null ist. Falls Ihr Wechselstromkreis nur aus einem Ohmschen Widerstand besteht, dann gilt $\varphi = 0$, so dass also Strom und Spannung in Phase sind

4.11.2 Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis

Wir berechnen die momentane Leistung an einem Ohmschen Widerstand, der in einem Wechselstromkreis liegt. Es gilt:

$$P(t) = U \cdot I = U_0\,I_0\,\sin^2(2\,\pi\,f\,t) = R\,I_0^2\,\sin^2(2\,\pi\,f\,t).$$

Für die mittlere Leistung erhalten wir

$$\langle R\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{R\,I_0^2}{2} = R\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Diese Gleichung legt die Definition der Effektivstromstärke nahe:

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \tag{4.63}$$

Damit schreibt sich die mittlere Leistung:

$$\langle P\rangle = R\,I_{\text{eff}}^2.$$

Die Effektivstromstärke gibt die Stärke desjenigen Gleichstroms an, der am Widerstand dieselbe elektrische Leistung abgibt wie ein Wechselstrom mit der Amplitude I_0. Analog definiert man die Effektivspannung:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \tag{4.64}$$

Messen Sie mit einem gewöhnlichen Messgerät die Spannung in der Steckdose, dann zeigt das Gerät den Effektivwert, also etwa in Kiel 230 V an.

4.11.3 Transformator

Was ist ein Transformator? Ein Transformator kann Spannungen vergrößern oder verkleinern. Wozu benötigt man Transformatoren? Aus der Steckdose entnehmen Sie 230 V. Der elektrische Generator, der Ihnen diese Spannung liefert ist vielleicht 100 km von Ihrer Wohnung entfernt. Die Leistung, die Sie Ihrer Steckdose entnehmen, muss vom Generator in Ihre Wohnung möglichst wirtschaftlich transportiert werden. Wirtschaftlich bedeutet, dass möglichst wenig Verluste mit diesem Transport verbunden sind. Nehmen wir an, dass die Zuleitung vom Generator bis zu Ihrer Steckdose einen Widerstand von 220 Ω besitze. Die Zuleitung führe einen Strom von 500 A bei einer Spannung von 735 kV. Dann ergibt sich eine Leistung von $P = U\,I = 367{,}5\,\text{MW}$. Der Wärmeverlust berechnet sich über $P_\text{W} = I^2\,R = 55\,\text{MW}$. Wäre die Spannung nur halb so groß, also 367,5 kV, und damit der Strom 1000 A (es soll ja dieselbe Leistung transportiert werden), dann wäre der Wärmeverlust schon 220 MW, wie Sie schnell nachrechnen können. Es lohnt sich daher, bei der Übertragung von elektrischer Leistung auf längeren Strecken eine möglichst hohe Spannung zu verwenden (Hochspannungsleitung). Um diese hohe Spannung zu erhalten, muss man die vom Generator erzeugte Spannung mit Hilfe eines Transformators erhöhen. Bei der Ankunft am Haushalt muss die Spannung aus Sicherheitsgründen wieder erniedrigt werden. Hierfür benötigt man Transformatoren.

Abbildung 4.26 zeigt Ihnen den prinzipiellen Aufbau eines Transformators. Er besteht immer aus einer Primär- und einer Sekundärseite. Die primärseitige Spule (Feldspule) habe N_p Wicklungen, die sekundärseitige (Induktionsspule) habe N_s Wicklungen. Beide Spule sind wie gezeigt um ein Eisenjoch gewickelt. Man legt nun die zu transformierende Wechselspannung U_p an die Primärseite an. Der damit verbundene Wechselstrom in der Primärspule erzeugt ein magnetisches Feld, das seine Richtung im Takt der Wechselspannung ändert. Dieses wechselnde Magnetfeld wird über das Eisenjoch auf die sekundärseitige Spule übertragen, in der infolgedessen eine Spannung, die Sekundärspannung U_s, induziert wird. Betrachten wir zunächst den unbelasteten Transformator, bei dem kein Verbraucher im Sekundärkreis geschaltet ist, so dass in der

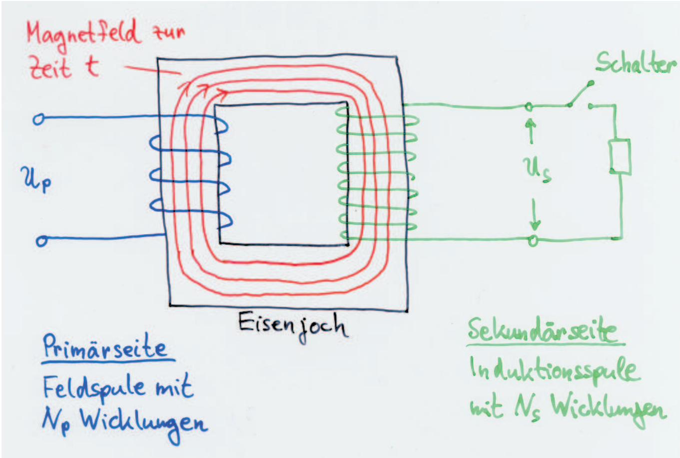


Abbildung 4.26: Transformator.

Sekundärseite kein Strom fließt. Die an die primärseitige Spule angelegte Wechselspannung U_p induziert in der Feldspule eine Spannung

$$U'_\mathrm{p} = -N_\mathrm{p}\,\dot{\Phi}.$$

Nach Kirchhoffs Maschenregel gilt aber

$$U_\mathrm{p} = -U'_\mathrm{p}.$$

Derselbe Fluss Φ durchsetzt auch die Induktionsspule, und seine Änderung induziert in ihr die Spannung

$$U_\mathrm{s} = -N_\mathrm{s}\,\dot{\Phi}.$$

Damit erhalten wir:

$$U_\mathrm{s} = N_\mathrm{s}\,\frac{U'_\mathrm{p}}{N_\mathrm{p}} = -\frac{N_\mathrm{s}}{N_\mathrm{p}}\,U_\mathrm{p}$$

und also als Transformatorgleichung

$$\frac{U_\mathrm{s}}{U_\mathrm{p}} = \frac{N_\mathrm{s}}{N_\mathrm{p}}. \tag{4.65}$$

Die Spannungen auf Primär- und Sekundärseite verhalten sich also wie die primär- und sekundärseitigen Wicklungen. Jetzt schließen wir den Schalter in Abb. 4.26 und erhalten so den belasteten Transformator, bei dem im Sekundärkreis ein Strom fließt. Wegen der Energieerhaltung (wir nehmen an, dass wir keine Wärmeverluste haben) muss die in den Primärkreis eingebrachte Leistung $P_\mathrm{p} = U_\mathrm{p}\,I_\mathrm{p}$ gleich der im Sekundärkreis entnommenen Leistung $P_\mathrm{s} = U_\mathrm{s}\,I_\mathrm{s}$ sein, so dass sich die Ströme wie folgt transformieren:

$$P_\mathrm{p} = P_\mathrm{s} \Leftrightarrow \frac{I_\mathrm{s}}{I_\mathrm{p}} = \frac{U_\mathrm{p}}{U_\mathrm{s}} = -\frac{N_\mathrm{p}}{N_\mathrm{s}}. \tag{4.66}$$

In der Vorlesung haben Sie Hochspannungs- und Niederspannungstransformatoren kennengelernt. Bei ersteren ist die Wicklungszahl der Sekundärspule sehr viel höher als die der Feldspule. Sie haben gesehen, dass es leicht ist, auf diese Weise die Spannung zwischen zwei Elektroden so groß zu machen, dass es Überschläge gibt. Beim Niederspannungstransformator ist die Wicklungszahl der Induktionsspule viel kleiner als die der Primärspule. Allerdings ist laut obiger Gleichung der Strom im Sekundärkreis sehr groß. Sie erinnern sich, dass er ausreicht, um ein Metallblech, das im Sekundärkreis als Verbraucher angeschlossen ist, zum Glühen zu bringen.