Physikalisches Praktikum für Anfänger - Teil 1
Gruppe 1 - Optik

1.1 Auflösungsvermögen von Spektralapparaten

1 Grundlagen

Spektrometer und Spektroskope dienen dazu, Licht spektral zu zerlegen. Fällt ein Parallelbündel auf ein Glasprisma, so werden die Anteile des Lichtes in Abhängigkeit ihrer Wellenlänge λ um verschieden große Winkel α abgelenkt. Ein Beugungsgitter zerlegt das Licht, da die Winkel, unter denen die Beugungsordnungen m erscheinen, eine Funktion der Wellenlänge ist. Für ein Transmissionsgitter mit der Gitterkonstanten g (Anzahl der Gitterstriche pro Längeneinheit) gilt für den Ablenkwinkel α: $\sin(\alpha) = g \cdot m \cdot \lambda$. Sowohl beim Prisma als auch beim optischen Gitter bezeichnet die Größe

$$D = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\lambda \tag{1}$$

die *Winkeldispersion* des Spektralapparates. Für das Gitter ist D eine Konstante und lässt sich aus Gleichung (1) berechnen.
Lässt man zunächst Licht auf einen Spalt (= Eintrittsspalt) fallen und lenkt danach das durch eine Linse parallelisierte Licht auf ein Gitter, so kann man das durch das Gitter gebeugte Licht mit Hilfe einer weiteren Linse in ihrer Brennebene bündeln. In dieser erscheinen die Abbilder des Eintrittsspaltes (= Spektrallinien), wobei Abbilder unterschiedlicher Wellenlängen wegen der Winkeldispersion nebeneinander liegen und als *Spektrum* der Lichtquelle erscheinen. Diese Abbildung kann mit einem Okular beobachtet werden.
Die Spektrallinie zweier Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ werden durch das Gitter, bzw. Prisma um die Winkel α und $\alpha + \Delta\alpha$ abgelenkt. Die Spaltbilder dieser zwei Wellenlängen haben in der Objektivbrennebene den Abstand

$$\Delta x_\mathrm{D} = f \cdot \Delta\alpha_\mathrm{D}\,, \tag{2}$$

wobei f die Brennweite der Objektivlinse und $\Delta\alpha_\mathrm{D}$ der Winkel zwischen zwei benachbarten Spektrallinien im Spektrum ist und angenommen wurde, dass $\Delta\alpha_\mathrm{D}$ klein ist.
Die Spektrallinienkontur kann durch die Spaltbreite a beeinflusst werden: Je schmaler der Spalt, und somit auch das Bild des Spaltes in der Objektivbrennebene, gemacht wird, desto näher benachbarte Linien kann man im Spektralapparat erkennen. Man kann also benachbarte Linien besser auflösen und erhöht somit das Auflösungsvermögen des Spektralapparates.
Jedoch wird das Spaltbild nicht beliebig schmal. Befindet sich die Spaltbreite in der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes, so wird die Spektrallinienkontur durch Beugung des Lichtes am Spalt sichtbar beeinflusst. Für die Beugung an einem Spalt ergibt sich, dass für den Winkelabstand $\Delta\alpha_\mathrm{B}$ zwischen dem ersten Beugungsminimum und dem nullten Beugungsmaximum (für kleine $\Delta\alpha_\mathrm{B}$) gilt:

$$\Delta\alpha_\mathrm{B} = \lambda/a. \tag{3}$$

In der Objektivbrennebene ergibt sich darauf für die Breite des nullten Beugungsmaximums:

$$\Delta x_\mathrm{B} = f \cdot \lambda/a\,. \tag{4}$$

Man erkennt, dass die Breite der Spektrallinien sich nun vergrößert, wenn man den Spalt verringert.
Man kann zusammenfassen: Durch Verkleinerung des Spaltes verbessert man zunächst das Auflösungsvermögen. Ist die Spaltbreite nun so klein, dass sich Beugungseffekte bemerkbar machen, so verbreitern

sich die Spektrallinien (das nullte Beugungsmaximum) wieder und die Auflösung verschlechtert sich.
Es stellt sich die Frage nach der optimalen Spaltbreite mit der optimalen Auflösung. *Lord Rayleigh* (1842-1919) hat ein Kriterium für die Auflösung aufgestellt, welches besagt, dass zwei Lichtpunkte noch als getrennt wahrgenommen werden können, wenn sie mindestens so weit auseinander liegen, dass das Hauptmaximum der einen Linie im ersten Beugungsminimum der anderen liegt.
Daraus folgt für unseren Versuchsaufbau: Wenn $\alpha_D = \alpha_B$ ist, so liegt der Mittelpunkt der einen Spektrallinie genau im ersten Beugungsminimum der anderen Linie und die beiden Spektrallinien sind gerade noch zu erkennen. Wird der Spalt allerdings soweit verkleinert, dass $\alpha_D < \alpha_B$ ist, so überlappen sich die Maxima nullter Ordnung und die beiden Spektrallinien können nicht getrennt gesehen werden. Es muss also die Bedingung

$$\Delta\alpha_B \leq \Delta\alpha_D \tag{5}$$

erfüllt sein, wenn man die entsprechenden Spektrallinien auflösen möchte.
Als das *Auflösungsvermögen A* definiert man den Quotienten aus mittlerer Wellenlänge und der Wellenlängendifferenz gerade noch trennbarer Linien

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}\,. \tag{6}$$

Setzen wir die Gleichungen (1), (3) in (6) ein und betrachten den Fall $\Delta\alpha_B = \Delta\alpha_D$, bei dem zwei benachbarte Spektrallinien gerade noch aufgelöst werden können, so ergibt sich für A

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{a \cdot \Delta\alpha_B}{\Delta\alpha_D / D} = a \cdot D\,. \tag{7}$$

Das Auflösungsvermögen eines Spektralapparates ist also gleich dem Produkt aus Winkeldispersion und Breite der begrenzenden Öffnung. Bei Gitterspektralapparaten lässt es sich auch als Funktion der effektiven (ausgeleuchteten) Strichzahl N und der Beugungsordnung z in der beobachtet wird ausdrücken. Das maximale Auflösungsvermögen ist dann:

$$N \cdot z \geq A_{\text{Gitter}} = D \cdot a. \tag{8}$$

Für das Auflösungsvermögen eines Prismas mit dem Brechungsindex n und der Basislänge b erhält man in ähnlicher Weise:

$$b \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = A_{\text{Prisma}} = D \cdot a. \tag{9}$$

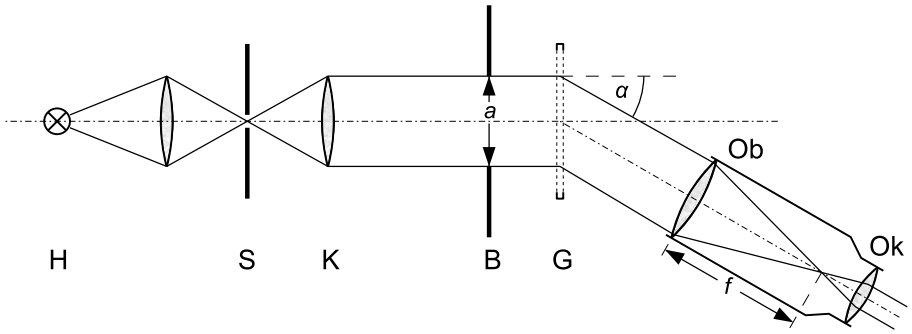
Im Versuch soll diese Theorie überprüft werden.

2 Aufbau und Durchführung

Der Vergleich von theoretischem Auflösungsvermögen A_{th} und experimentell zu ermittelndem wird an einem Prisma und den ersten drei Beugungsordnungen eines Gitters durchgeführt. Hierzu steht ein kleiner Spektralapparat zur Verfügung, bei dem Gitter und Prisma ausgetauscht werden können. Der jeweilige Aufbau ist in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt. Zunächst ist der Aufbau zu justieren:

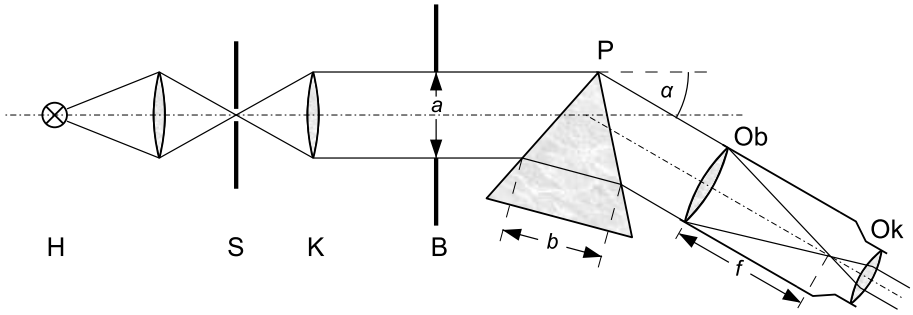
- Entnehmen sie dem Holzkasten das 12×Okular und setzen Sie es in das Fernrohr ein. Nehmen Sie das Fernrohr aus der Apparatur und stellen Sie es auf dem Flur auf „Unendlich“ ein. Verdrehen Sie das entsprechende Rädchen ab jetzt nicht mehr.

- Stellen Sie die Linse, die direkt vor der Hg-Lampe steht so auf, das durch sie möglichst viel Licht auf den Spalt gesammelt wird.



H – Hg-Lampe
S – Spalt
K – Kollimator
B – Bündelbegrenzung
G – Gitter
Ob – Fernrohrobjektiv
Ok – Okular

Abbildung 1: Aufbau des Gitterspektrometers



H – Hg-Lampe
S – Spalt
K – Kollimator
B – Bündelbegrenzung
P – Prisma
Ob – Fernrohrobjektiv
Ok – Okular

Abbildung 2: Aufbau des Prismenspektrometers

- Schauen Sie durch das wieder in den Aufbau eingesetzte Fernrohr direkt in den Kollimator. Leuchtet der Spalt zu hell, so reduzieren Sie seine Breite. Verschieben Sie nun die Kollimatorlinse solange bis durch das Fernrohr eine scharfes Spaltbild zu sehen ist.

Der Vergleich von Theorie und Experiment wird anhand der beiden gelben Quecksilberlinien durchgeführt. Ihre Wellenlängen sind

$$\lambda = 577,12\,\text{nm} \qquad \text{und} \qquad \lambda = 579,23\,\text{nm}$$

Aufgaben:

1. Berechnen Sie zunächst das zur Trennung dieser beiden Linien nötige Auflösungsvermögen nach Gleichung (6).

2. Bestimmen sie nun das experimentelle Auflösungsvermögen. Gehen sie dabei folgendermaßen vor:

   - Stellen Sie das Gitter am Ende der ersten optischen Bank auf (Striche senkrecht) und fahren Sie mit dem Fernrohr nach rechts in die dritte Beugungsordnung. Beide gelbe Linen müssen deutlich zu sehen sein.
   - Setzen Sie Blende B zwischen Gitter und Kollimator und verringern Sie a soweit, dass die beiden gelben Linien gerade noch trennbar sind bevor sie in eine einzige Linie übergehen (an diesem Punkt gilt Gleichung (7)). Messen Sie a mit der Schieblehre und ermitteln Sie den Fehler Δa durch Wiederholungsmessungen.

- Bestimmen Sie a und Δa für das Prisma und die ersten drei Beugungsordnungen des Gitters. Achten Sie beim Prisma auf symmetrischen Strahldurchgang (der Ablenkwinkel α ist dann minimal).

3. Zur Bestimmung der Dispersion D sind nun die Abstände Δx_{D} von grüner $(\lambda = 546,23\,\mathrm{nm})$ und erster gelber Quecksilberlinie auszumessen.
   - Tauschen Sie das $12\times$ gegen das $4\times$Okular aus. Entfernen Sie Blende B und das Gitter bzw. Prisma aus dem Aufbau und stellen Sie an dem bis jetzt verbotenen Rädchen das Fernrohr so ein, dass der Spalt wieder scharf zu sehen ist. Im Weiteren ist die Fernrohreinstellung nicht mehr zu verändern.
   - Messen sie nun für das Prisma und für die ersten drei Beugungsordnungen des Gitters mit Hilfe des im Okular sichtbaren Maßstabes die Abstände Δx_{D} von grüner und erster gelber Linie aus. Für den Okularmaßstab gilt
     $$1\,\mathrm{Skt} = 0,146\,\mathrm{mm}\,.$$
     Berechnen Sie nach Gleichungen (1) und (2) die Dispersion D und mit den oben ermittelten Werten für die Spaltbreiten das Auflösungsvermögen A nach Gleichung (7). Führen Sie eine Fehlerrechnung durch und vergleichen Sie die Werte mit A_{th}.

4. Bestimmen sie nach Gleichung (8) aus dem berechneten Auflösungsvermögen die Gitterkonstante und die Anzahl der Striche der $3\,\mathrm{cm}$ breiten Gitterfläche. Geben Sie einen Fehler für die Gitterkonstant an.

5. Wie groß wäre das Auflösungsvermögen des verwendeten Gitters für die ersten drei Beugungsordnungen und für das Prisma, wenn man die Bündelbegrenzung weglassen würde?

Literatur:

Bergmann-Schaefer, Band III Optik, § 3.12 (8.Aufl.).

09.2009/Hau,Ra